第 2 章　不等式和方程

数量关系是数学研究客观世界的基本方面之一. 数量关系中有等量关系（如方程），也有不等量关系（如不等式）. 本章在初中已学过的不等式知识的基础上，进一步研究不等关系，提升运算技能，为数学课程及其他科学知识的学习奠定基础.

方程这个名词，最早见于我国古代算书《九章算术》.《九章算术》是在我国东汉初年编定的一部现有传本的、最古老的中国数学经典著作. 书中收集了 246 个应用问题和其他问题的解法，分为九章. “方程”是其中的一章. 在这一章里的所谓“方程”，是指一次方程组. 例如其中的第一个问题实际上就是求解三元一次方程组. 我国古代数学家刘徽注释《九章算术》说，“程，课程也. 二物者二程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程.”这里所谓“如物数程之”，是指有几个未知数就必须列出几个等式. 上述方程的概念，在世界上要数《九章算术》中的“方程”章最早出现. 其中解方程组的方法，不但是我国古代数学中的伟大成就，而且是世界数学史上一份非常宝贵的遗产.

我国古代的方程在公元前一世纪的时候已经有多元方程组、一元二次方程及不定方程几种. 不定方程出现在二千多年前的中国，这比我们熟知的古希腊的丢番图方程要早三百多年. 具有 $x^3+px^2+qx=A$ 和 $x^3+px^2=A$ 形式的三次方程，中国在公元七世纪的唐代王孝通的《缉古算经》中已有记载，并用“从开立方除之”而求出数字解答（可惜原解法失传了）. 王孝通得到这种解法时心情非常愉悦，他说谁能够改动他著作内的一个字可酬以千金.

然而，对于方程的追求并不局限于中国，历史上的许多数学家和哲学家都曾深深地被她吸引. 丢番图酷爱数学，他的墓志铭是这样写的：“坟中安葬着丢番图，多么令人惊讶，它忠实地记录了所经历的道路. 上帝给予的童年占六分之一，又过十二分之一两颊长须，再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛. 五年后天赐贵子，可怜迟到的宁馨儿，享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓. 悲伤只有用数论的研究去弥补，又过四年，他也走完了人生的旅途.”

《希腊文集》中有一道关于古希腊著名数学家毕达哥拉斯的问题. 一个人问：“尊敬的毕达哥拉斯，请告诉我，有多少学生在你的学校里听你讲课？”毕达哥拉斯回答说：“一共有这么多学生在听课，其中 1/2 在学习数学，1/4 学习音乐，1/7 沉默无言，此外，还有 3 名妇女.”

由此可见，方程的魅力在于体现了已知与未知的对立统一.

2.1 不等式的基本性质

2.1.1 比较实数大小的方法

实例引入

比较 10.83 与 10.72 两个数的大小.

我们可以通过观察两个数的差的符号，来比较它们的大小.

因为$10.83-10.72=0.11>0$，所以 10.83 比 10.72 大了 0.11.

新知识

由此可知，对于任意两个实数a,b，有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

所以，比较两个实数的大小只需考察它们的差即可.

通过观察两个数的差的符号，来比较它们的大小的方法叫做**作差法**.

例 1 比较$\dfrac{3}{7}$与$\dfrac{4}{9}$的大小.

解 $\dfrac{3}{7}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{27-28}{63}=-\dfrac{1}{63}$. 所以$\dfrac{3}{7}$小于$\dfrac{4}{9}$.

例 2 比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

解 $(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)=-7<0$

所以$(a+3)(a-5)$小于$(a+2)(a-4)$.

练习 2.1.1

比较下列各组实数的大小：

（1）$\dfrac{7}{8}$与$\dfrac{8}{9}$；　（2）$\dfrac{3}{7}$与0.43；　（3）$\dfrac{4}{7}$与$\dfrac{5}{6}$.

2.1.2 不等式的基本性质

回顾

在初中阶段我们学习过几个不等式的性质，下面我们一起复习一下，设a,b,c均为实数，有

性质 1 如果$a>b$，那么$a+c>b+c$.

此性质叫做不等式的**加法性质**．它表明：不等式两边同时加（或减）同一个数，不等号的方向不变．

性质 2　如果 $a>b,c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b,c<0$，那么 $ac<bc$．

此性质叫做不等式的**乘法性质**．它表明：不等式两边同乘（或除以）一个正数，不等号方向不变；同乘（或除以）一个负数，不等号方向改变．

今天我们再介绍一个新的性质．

新知识

甲比乙高，乙比丙高，那么显然甲一定比丙高．不等式也具有类似的性质．

性质 3　如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$．

证明　$a>b \Rightarrow a-b>0$，

$b>c \Rightarrow b-c>0$，

于是有　$a-c=(a-b)+(b-c)>0$，

所以有　$a>c$．

此性质叫做不等式的**传递性**．

例 3　用符号“<”或“>”填空．

（1）设 $a>b$，$a+5$ _____ $b+5$；

（2）设 $a>b$，$a-4$ _____ $b-4$；

（3）设 $a>b$，$\frac{2}{3}a$ _____ $\frac{2}{3}b$；

（4）设 $a>b$，$1-2a$ _____ $1-2b$．

解　由不等式的加法性质，有（1）（2）两题都是 $>$．

由不等式的乘法性质，有（3）题是 $>$．

由不等式的加法性质和乘法性质，有（4）题是 $<$．

例 4　已知 $a>b,c>d$，求证 $a+c>b+d$．

证明　$\because a>b \therefore a+c>b+c$．又 $\because c>d \therefore b+c>b+d$

由不等式的传递性，有：$a+c>b+d$．

例 5　已知 $a>b>0,c>d>0$，求证 $ac>bd$．

证明　$\because a>b,c>0 \therefore ac>bc$．又 $\because c>d,b>0 \therefore bc>bd$．

由不等式的传递性，有：$ac>bd$．

例 6　已知 $a>b$，且 $-c<-d$，求证 $a+c>b+d$．

证明　$\because a>b \therefore a+c>b+c$，又 $-c<-d \therefore c>d$，则有 $b+c>b+d$

所以由传递性，有 $a+c>b+d$．

练习 2.1.2

1．填空：

（1）已知$m>n>0$，则$2-\frac{2}{3}m$______$2-\frac{2}{3}n$．

（2）$3-4x>11$，则$x>$_______．

2．已知$a>b>0$，求证$a^2>b^2$．

习题 2.1

1．填空题：

（1）$\frac{4}{7}$______$\frac{5}{8}$；　（2）$-\frac{9}{10}$______$-\frac{10}{11}$；　（3）$\frac{11}{5}$______$\frac{16}{7}$；

（4）设$a>b$，则$a-5$_____$b-5$，$a+3$_____$b=3$，$a+1$_____$b-2$；

（5）设$a<b$，则$3a$_____$3b$，$-3a$_____$-3b$，$1-3a$_____$1-3b$；

（6）设$a-3>5$，则$a>$_____；　（7）设$a+3<5$，则$a<$_____；

（8）设$2a-3>5$，则$a>$_____；　（9）设$\frac{a-3}{10}>\frac{2}{5}$，则$a>$_____．

2．解下列不等式：

（1）$\frac{x-1}{2}\geq\frac{2x+5}{3}$；　（2）$\frac{5x-3}{2}<\frac{x+4}{3}$；　（3）$2(2x-1)\leq 3(x+2)-1$．

3．当x为何值时，代数式$\frac{x+2}{3}$的值与代数式$\frac{2x-1}{4}$的值之和不大于 3？

4．设x、y为两个不相等的实数，判断x^2-xy与$xy-y^2$的大小？

2.2　方程与方程组

在解决实际问题时，往往从问题中的未知量入手，探求未知量和已知量之间的数量关系，通过适当设元建立相应个数的方程，解方程（组），最终达到解决问题的目的．

2.2.1　一元一次方程

回顾

含有未知数的等式叫做方程．使方程左右两边相等的未知数的值叫做方程的解．求方程解的过程叫做解方程．

若方程中只含有一个未知数，且未知数的最高次数为 1 次，则称该方程为一

元一次方程．

知识巩固

在解一元一次方程时需用到等式的基本性质：

1．等式左右两边同时加上或减去同一个数（或代数式），等式仍然成立；

2．等式两边同时乘上或除以同一个数（0 除外），等式仍然成立．

例 1　解一元一次方程 $\dfrac{4x+1}{6}-\dfrac{3x-2}{4}=1$．

解　通分后，去分母得

$$2(4x+1)-3(3x-2)=12,$$

去括号得　$8x+2-9x+6=12$，

移项得　$8x-9x=12-2-6$，

合并同类项　$-x=4$，

系数化为 1　$x=-4$．

练习 2.2.1

解下列方程：

（1）$4(x-1)=3(x+2)-3$；　　（2）$\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{3-2x}{2}=1$．

2.2.2　二元一次方程组

回顾

由几个方程组成的一组方程叫做方程组．

如果组成方程组的方程中含有两个未知数，且未知数的次数都是 1 次，则称这样的方程组为二元一次方程组，其一般形式为：

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}.$$

使二元一次方程组的两个方程左、右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程组的解．求方程组解的过程，叫做解方程组．

知识巩固

解二元一次方程组一般采用消元法，消元法有代入消元法和加减消元法，都是通过将方程组的未知数的个数由两个变成一个，从而将解二元一次方程组转化成求解一元一次方程．

例 2 解方程组 $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 3x+2y=9 & (2) \end{cases}$

解 （代入消元法）

由（1）得 $x=5-y$ （3）

把（3）式代入（2）式，得

$$3(5-y)+2y=9$$

解得 $y=6$，

把 $y=6$ 代入（3）式，得 $x=-1$

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases}$.

请试用加减消元法求解方程组.

练习 2.2.2

解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x+3y=5 \\ -3x+2y=-4 \end{cases}$； （2）$\begin{cases} 3x-7y=1 \\ 5x-2y=9 \end{cases}$.

2.2.3 一元二次方程

实例引入

购买铅笔和橡皮共用 2 元，铅笔与橡皮所用钱数的比等于橡皮所用钱数与总钱数的比，求橡皮所用钱数为多少？（列方程解答）

解 设橡皮所用钱数为 x 元，则铅笔所用钱数为 $2-x$ 元，可得方程

$$\frac{x}{2}=\frac{2-x}{x},$$

整理，得方程 $x^2+2x-4=0$.

知识巩固

含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 次的方程叫做**一元二次方程**，一般地，任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都可以化成一元二次方程的一般形式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).$$

其中，a 为方程的二次项系数，b 为方程的一次项系数，c 为常数项.

例 3 将方程 $(3-2x)(5-3x)=18$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

分析：一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）．因此，必须运用整式运算对方程 $(3-2x)(5-3x)=18$ 进行整理．

解　去括号，得

$$15-9x-10x+6x^2=18$$

移项整理得　$6x^2-19x-3=0$

其中二次项系数为 6，一次项系数为−19，常数项为−3．

练习 2.2.3

1．关于 x 的方程 $(a-1)x^2+3x+1=0$ 是一元二次方程，则 a 的取值范围是____________．

2．将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项．

（1）$2x^2=3(x-6)$；　　（2）$3x^2-3=2x+1$．

2.2.4　一元二次方程的解法

回顾

解一元二次方程的基本方法有四种：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，见表 2.2-1．

表 2.2-1　一元二次方程的基本解法

解法	适合方程类型	注意事项
直接开平方法	$(x+a)^2=b$	$b\geq 0$ 时有解，$b<0$ 时无解
配方法	$x^2+px+q=0$	二次项系数不为 1 时，需先把系数化为 1
公式法	$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）	$\Delta=b^2-4ac$，$\Delta\geq 0$ 时，方程有解，$x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}$；$\Delta<0$ 时无解
因式分解法	方程的一边为 0，另一边分解成两个一次因式的积	方程的一边必须为 0，另一边可用任何方法分解因式

知识巩固

例 4　用直接开平方法解方程 $(2x+1)^2=9$．

解　两边同时开平方得　$2x+1=\pm 3$

由 $2x+1=3$　　得　$x=1$

由$2x+1=-3$　　得　$x=-2$

所以原方程的解为：$x_1=-2$，$x_2=1$.

例 5　用配方法解方程$2x^2-4x-8=0$.

分析　配方法的步骤：先把二次项系数化为 1，并把常数项移到一边→方程两边同时加上一次项系数一半的平方（方程变为完全平方式）→直接开平方求得解.

解　二次项系数化为 1，整理得　$x^2-2x=4$

配方得　$x^2-2x+1^2=4+1^2$　即　$(x-1)^2=5$

直接开平方得　$x-1=\pm\sqrt{5}$

$x=1\pm\sqrt{5}$

所以原方程的解为　$x_1=1-\sqrt{5}$，$x_2=1+\sqrt{5}$.

例 6　用公式法解方程$3x^2+4=7x$.

分析　公式法就是利用一元二次方程的求根公式$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，步骤为①把方程化为一般形式，从而确定各项系数$a,b,c$的值；②计算判别式$\Delta=b^2-4ac$的值，当$\Delta<0$时，原方程无解；当$\Delta\geq 0$时，把$a,b,c$的值代入求根公式就可以得到原方程的根.

解　化为一般式得　$3x^2-7x+4=0$，从而得到$a=3,b=-7,c=4$.

求出判别式的值$\Delta=b^2-4ac=1>0$

代入求根公式得　$x=\dfrac{7\pm 1}{6}$

所以原方程的解为　$x_1=1,x_2=\dfrac{4}{3}$.

> 公式法可以用来解所有的一元二次方程，在找不到简单方法时，即可考虑化为一般式后使用公式法求解.

例 7　用分解因式法解方程$x^2-4x+3=0$.

解　将方程左边因式分解得　$(x-3)(x-1)=0$

所以原方程的解为　$x_1=1,x_2=3$.

练习 2.2.4

1．填空题：

（1）x^2+4x+______$=(x+$______$)^2$.

（2）方程$x^2-3x+1=0$中，$\Delta=$______，此方程________实数根.

（3）方程$2x^2-x+1=0$中，$\Delta=$______，此方程________实数根.

2．解下列各方程：

（1）$x^2-2x+1=0$；　　（2）$3x^2-4x=2$；

（3）$x^2+4x-12=0$；　　（4）$2x^2+3x-1=0$.

习题 2.2

解下列方程和方程组：

（1）$3+6x=10-x$；　　（2）$2(6x-1)+3(1-x)=11+2x$；

（3）$\begin{cases}3x-6y=1\\2x+y=4\end{cases}$；　　（4）$\begin{cases}2x+3y=10\\3x+2y=4\end{cases}$；

（5）$6x^2+x-15=0$；　　（6）$(x+3)(x-6)=-8$；

（7）$3x^2+4x-7=0$；　　（8）$x^2=6x$.

2.3　一元二次不等式

回顾

观察一次函数$y=x-2$的图像（如图 2.3-1 所示），当$y=0$时，得到相应一次方程$x-2=0$，方程的解$x=2$是函数图像与坐标轴x轴交点的横坐标；当$y>0$时，得到相应一元一次不等式$x-2>0$，这时不等式的解$\{x\mid x>2\}$是函数在x轴上方的图像所对应的自变量x的取值范围；同理函数在x轴下方的图像所对应的自变量x的取值范围是$y<0$时所得一元一次不等式$x-2<0$的解$\{x\mid x<2\}$.

由此可知一次函数、一元一次方程和一元一次不等式之间的联系，由一次函数的图像可求出相应一元一次不等式的解集.

一般地，方程$ax+b=0(a>0)$的解为$x=-\dfrac{b}{a}$，那么相应一次函数$y=ax+b$的图像与x轴的交点为（$-\dfrac{b}{a},0$），且有：

（1）不等式$ax+b>0$的解集$\left\{x\,\middle|\,x>-\dfrac{b}{a}\right\}$是函数$y=ax+b$的图像在$x$轴上方部分所对应的自变量$x$的取值范围；

（2）不等式$ax+b<0$的解集$\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{b}{a}\right\}$是函数$y=ax+b$的图像在$x$轴下

方部分所对应的自变量x的取值范围.

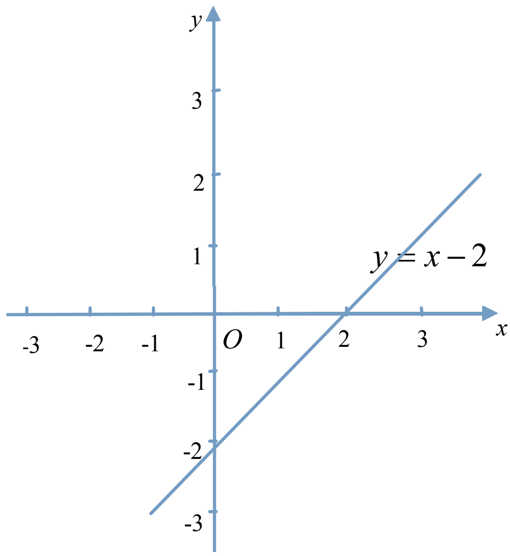

图 2.3-1

此种方法同样适用于利用二次函数的图像求得相应一元二次不等式的解集.

新知识

画出并观察二次函数$y=x^2-2x-3$的图像（如图 2.3-2 所示）. 可以看出，函数的图像为开口向上的抛物线，顶点为(1,−4)，与x轴的交点的横坐标恰是相应一元二次方程$x^2-2x-3=0$的解$x_1=-1,x_2=3$. 一元二次不等式$x^2-2x-3>0$的解集是函数图像在x轴上方部分所对应的自变量x的取值范围$\{x\,|\,x<-1$或$x>3\}$；一元二次不等式$x^2-2x-3<0$的解集是函数图像在x轴下方部分所对应的自变量x的取值范围$\{x\,|-1<x<3\}$.

由此可见，我们可通过二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像求解相应一元二次不等式.

设$a>0$，此时二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像为开口向上的抛物线.

（1）当$\Delta=b^2-4ac>0$时，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实根$x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴有两个交点$(x_1,0)$，$(x_2,0)$，如图 2.3-3（a）所示，一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解为$\{x\,|\,x<x_1$或$x>x_2\}$；一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$的解为$\{x\,|\,x_1<x<x_2\}$.

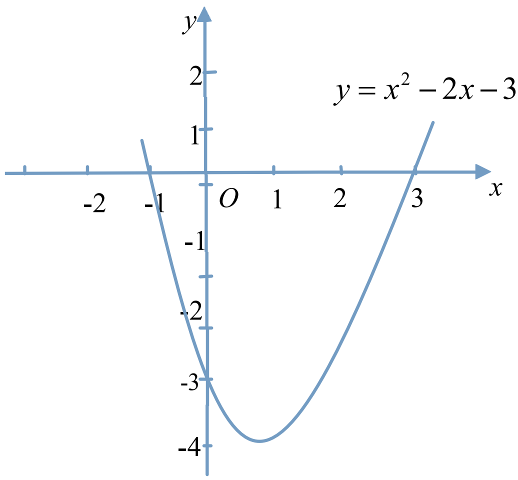

图 2.3-2

（2）当$\Delta = b^2 - 4ac = 0$时，一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$有两个相等的实根x_0，二次函数$y = ax^2 + bx + c$的图像与x轴有一个交点$(x_0,0)$，如图 2.3-3（b）所示，一元二次不等式$ax^2 + bx + c > 0$的解为$\{x \mid x \neq x_0\}$；一元二次不等式$ax^2 + bx + c < 0$的解为$\varnothing$.

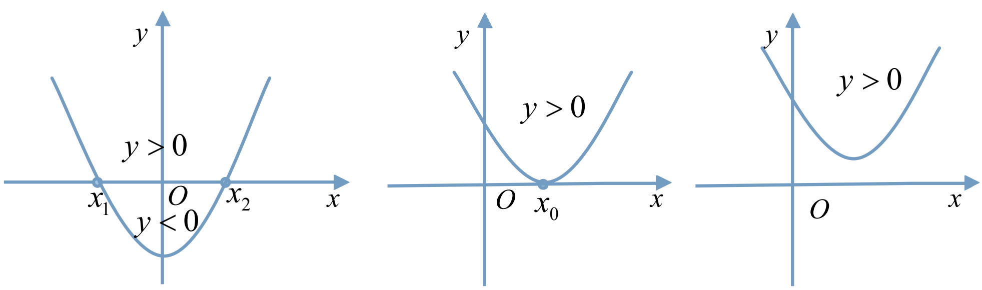

图 2.3-3

（3）当$\Delta = b^2 - 4ac < 0$时，一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$没有实根，二次函数$y = ax^2 + bx + c$的图像与x轴没有交点，如图 2.3-3（c）所示，一元二次不等式$ax^2 + bx + c > 0$的解为R；一元二次不等式$ax^2 + bx + c < 0$的解为$\varnothing$.

综上所述，当$a > 0$时，一元二次不等式的解集如表 2.3-1 所示.

表 2.3-1

方程或不等式	解或解集（$\Delta=b^2-4ac$）		
	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	x_1,x_2 （$x_1<x_2$）	x_0	无解
$ax^2+bx+c>0$	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_0\}$	R
$ax^2+bx+c<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$\{x\mid x\leq x_1或x\geq x_2\}$	R	R
$ax^2+bx+c\leq 0$	$\{x\mid x_1\leq x\leq x_2\}$	$\{x\mid x=x_0\}$	$\varnothing$

请试着列出当$a<0$时，一元二次不等式的解集表.

知识巩固

例 1 解下列一元二次不等式：

（1）$x^2-4x+3>0$；（2）$x^2+6x+10\geq 0$；

（3）$2x^2<3x$；（4）$-2x^2+4x-1\leq 0$

分析 当二次项的系数$a>0$时，可以利用表 2.3-1 来求得一元二次不等式的解；若二次项的系数$a<0$，可以先将不等式两边同时乘上−1，不等式方向改变，得到二次项系数为正数的新的不等式，此不等式的解集与原不等式相同，利用表 2.3-1 来求得原一元二次不等式的解.

解 （1）二次项系数$a=1>0$，且$\Delta=b^2-4ac=4>0$，方程$x^2-4x+3=0$有两个不相等的解$x_1=1,x_2=3$，所以原不等式的解为$\{x\mid x<1或x>3\}$；

（2）二次项系数$a=1>0$，且$\Delta=b^2-4ac=-4<0$，方程$x^2+6x+10=0$无解，所以原不等式的解为R；

（3）原不等式通过移项可化为$2x^2-3x<0$，二次项系数$a=2>0$，且$\Delta=b^2-4ac=1>0$，方程$2x^2-3x=0$有两个不相等的解$x_1=0$，$x_2=\dfrac{3}{2}$，所以原不等式的解为$\{x\mid 0<x<\dfrac{3}{2}\}$；

（4）二次项系数$a=-2<0$，将不等式两边同时乘上−1，得到$2x^2-4x+1\geq 0$，且$\Delta=b^2-4ac=8>0$，方程$2x^2-4x+1=0$有两个不相等的解

$$x_1=1-\frac{\sqrt{2}}{2},x_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以不等式 $2x^2-4x+1\geq 0$ 的解为 $\{x\mid x\leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\}$，即原不等式 $-2x^2+4x-1\leq 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

> 由练习可归纳出解一元二次不等式的步骤：①将二次项系数化为正数；②求解二次方程的根；③根据①后的二次不等式的符号写出解集即可.

拓展延伸

例 2　x 取什么值时，$\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义？

解　要想 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义，需要 $x^2-x-6\geq 0$，而 $x^2-x-6\geq 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leq -2或x\geq 3\}$，所以 $x\in(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$ 时，$\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义.

练习 2.3

解下列一元二次不等式：

（1）$2x^2-2x-8>0$；　　（2）$-x^2+2x+15\geq 0$.

习题 2.3

1．解下列一元二次不等式：

（1）$2x^2-8\leq 0$；　　（2）$x^2-x+6<0$；

（3）$x^2+x<6$；　　（4）$2x^2+3x-6\leq 3x^2+x-1$；

（5）$-2x^2-6x+20\geq 0$.

2．x 取什么值时，$\sqrt{3x^2-6}$ 有意义？

2.4　含有绝对值的不等式

前面我们已学习过不等式的性质，下面我们再来研究一些含有绝对值的不等式的问题.

回顾

当 $a>0$ 时，

$$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a,$$

$$|x|>a\Leftrightarrow x>a 或 x<-a .$$

新知识

定理 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$

证明 因为

$$-|a|\le a\le|a|$$
$$-|b|\le b\le|b|$$

所以 $-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$

即 $|a+b|\le|a|+|b|$ （1）

令 $a=a+b-b$ 代入①式得

$$|a|=|a+b-b|\le|a+b|+|-b|=|a+b|+|b|$$

即 $|a|-|b|\le|a+b|$ （2）

由（1）（2）式得 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

推论 1 $|a+b+c|\le|a|+|b|+|c|$

推论 2 $|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$

想一想： 定理中 a、b 满足什么条件时，可以取等号？

例 1 解下列不等式并把不等式的解在数轴上表示出来.

（1）$|x|<2$； （2）$2|x|-6\ge0$.

解 （1）不等式的解集为 $-2<x<2$，在数轴上表示如图 2.4-1 所示.

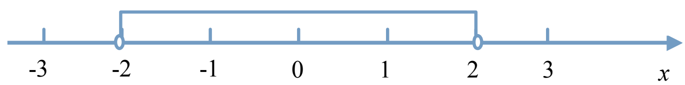

图 2.4-1

（2）由 $2|x|\ge6$，得 $|x|\ge3$，所以原不等式的解集为 $x\ge3$ 或 $x\le-3$. 在数轴上表示如图 2.4-2 所示.

图 2.4-2

试一试： 解下列不等式并把不等式的解在数轴上表示出来：

（1）$3|x|<2$； （2）$|x|-3\ge0$.

拓展延伸

例 2 解不等式 $|x+1|<2$.

分析 形如 $|ax+b|<c$ 或 $|ax+b|>c$ $(c>0)$ 的不等式，可以通过变量替换的方法，把绝对值内的 $ax+b$ 看作一个变量，从而利用

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$，　　　$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 b

求得不等式的解集.

解　设 $m=x+1$，则原不等式化为 $|m|<2$，其解集为

$$-2<m<2$$

即　$$-2<x+1<2$$

整理得原不等式的解为　$-3<x<1$.

> 熟练后，在实际运算中，可以省略变量替换的过程.

例 3　解不等式 $|2x-1|\leq 5$.

解　由原不等式可得　$-5\leq 2x-1\leq 5$

整理后得原不等式的解集为　$-2\leq x\leq 3$.

例 4　解不等式 $|2x+3|>7$.

解　由原不等式可得　$2x+3>7$ 或 $2x+3<-7$

整理后得原不等式的解集为　$x>2$ 或 $x<-5$.

练习 2.4

解下列不等式：

（1）$|2x+5|>3$；　（2）$|3x-5|\leq 7$；　（3）$|x+1|\geq 3$.

习题 2.4

解下列不等式：

（1）$|2x|\geq 3$；　（2）$|3x|<10$；　（3）$|4x-5|\leq 9$.

小结

本章主要学习不等式的性质、方程（组）与不等式的解法.

一、任意实数比较大小

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

二、不等式的基本性质

1．$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$；

2．$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

3． $a>b$ 且 $c>0 \Rightarrow ac>bc$， $a>b$ 且 $c<0 \Rightarrow ac<bc$.

三、方程（组）的解法（见表 2-1）

表 2-1

一元二次方程的解法	适合方程类型	注意事项
直接开平方法	$(x+a)^2=b$	$b\geq 0$ 时有解， $b<0$ 时无解
配方法	$x^2+px+q=0$	二次项系数不为 1 时，需先把系数化为 1
公式法	$ax^2+bx+c=0$ （ $a\neq 0$ ）	$\Delta=b^2-4ac$，时，$\Delta\geq 0$ 方程有解；$\Delta<0$ 时无解
因式分解法	方程的一边为 0，另一边分解成两个一次因式的积	方程的一边必须为 0，另一边可用任何方法分解因式

四、不等式的解

1．一元二次不等式的解（见表 2-2）

表 2-2

方程或不等式（ $a>0$ ）	解或解集（ $\Delta=b^2-4ac$ ）		
	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	x_1,x_2 （ $x_1<x_2$ ）	x_0	无解
$ax^2+bx+c>0$	$\{x\mid x<x_1\text{或}x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_0\}$	R
$ax^2+bx+c<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$\{x\mid x\leq x_1\text{或}x\geq x_2\}$	R	R
$ax^2+bx+c\leq 0$	$\{x\mid x_1\leq x\leq x_2\}$	$\{x\mid x=x_0\}$	$\varnothing$

2．含有绝对值不等式的解法
当 $a>0$ 时，$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 b；
$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$.

复习题 2

1．选择题：
（1）一元二次方程 $x^2-mx+4=0$ 有实数解，则（　　）.

A．$m \in (-4,4)$　　B．$m \in [-4,4]$

C．$m \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)$　　D．$m \in (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$

（2）下列式子是方程的为（　　）.

A．$2m-4$　　B．$m^2-4m=4$

C．$3m-4<5$　　D．$4^3+1=65$

（3）不等式$-x^2+4x+21 \le 0$的解集为（　　）.

A．$[-7,3]$　　B．$[-3,7]$

C．$[-\infty,-3) \cup [7,+\infty)$　　D．$(-\infty,-7] \cup [3,+\infty)$

（4）下列式子是一次方程的为（　　）.

A．$y=3(x-2)-3x$　　B．$y=x^2-4x$

C．$y=(x-2)(x+1)-(x^2-3)$　　D．$y=x^3+1$

2．填空题：

（1）已知集合$A=[1,4]$，$B=(-1,2]$，则$A \cup B=$_____，$A \cup B=$_____；

（2）x^2+2x+______$=(x+$______$)^2$；x^2-3x+______$=(x-$______$)^2$；

（3）方程$2x^2+5x-1=0$中，$\Delta=$________，方程________实数根；

（4）当x________时，$\sqrt{5x^2+4x+1}$有意义.

3．解下列各方程（组）：

（1）$3(x-1)=8(x-8)+6$；

（2）$x^2+10x+21=0$；

（3）$\begin{cases} 7x-2y=8 \\ 3x+y=10 \end{cases}$.

4．解下列各不等式（组）：

（1）$3(x-1) \le 2(x-8)$；

（2）$x^2+10x+21 \ge 0$；

（3）$\begin{cases} 2-3x<8 \\ 3x-6 \ge x+2 \end{cases}$；

（4）$3x^2-3x+2<0$；

（5）$|2x+7| \le 3$；

（6）$|5x-6|>3$.

阅读材料

在数学发展史上，有许多关于数学方程的问题，下面是其中的两个，请慢慢玩味.

欧拉遗产问题

有一位父亲，临终时嘱咐他的儿子这样来分他的财产：第一个儿子分得 100 克朗和剩下财产的十分之一；第二个儿子分得 200 克朗和剩下财产的十分之一；第三个儿子分得 300 克朗和剩下财产的十分之一；第四个儿子分得 400 克朗和剩下财产的十分之一……按这种方法一直分下去，最后，每一个儿子所得财产一样多．问：这位父亲共有几个儿子？每个儿子分得多少财产？这位父亲共留下了多少财产？

解：设这位父亲共有 n 个儿子，最后一个儿子为第 n 个儿子，则倒数第二个就是第$(n-1)$个儿子．通过分析可知：

第一个儿子分得的财产＝100×1+剩余财产的十分之一；

第二个儿子分得的财产＝100×2+剩余财产的十分之一；

第三个儿子分得的财产＝100×3+剩余财产的十分之一；

第$(n-1)$个儿子分得的财产＝$100\times(n-1)$+剩余财产的十分之一；

第 n 个儿子分得的财产为 $100n$.

因为每个儿子所分得的财产数相等，即 $100\times(n-1)$+剩余财产的十分之一＝$100n$，

所以剩余财产的十分之一就是　　$100n-100\times(n-1)=100$ 克朗.

那么，剩余财产就为　　100÷十分之一＝1000 克朗，

最后一个儿子分得　　1000－100＝900 克朗.

从而得出，这位父亲有（900÷100）＝9 个儿子，共留下财产 900×9＝8100 克朗.

爱神的烦恼

爱罗斯在路旁哭泣，泪水一滴接一滴.

吉波莉达向前问道：“波利尼，是什么事情使你如此伤悲？我可能够帮助你？”

爱罗斯回答道：“九位文艺女神，不知来自何方，把我从赫尔康山采回的苹果，几乎一扫而光．叶芙特尔波飞快地抢走十二分之一，爱拉托抢得更多——七个苹果中拿走一个．八分之一被达利娅抢走，比这多一倍的苹果落入特希霍拉之手．美

利波美娜最是客气，只取走二十分之一. 可又来了克里奥，她的收获比这多四倍. 还有三位女神，个个都不空手，30 个归波利尼娅，120 个归乌拉尼娅，300 个归卡利奥帕. 我，可怜的爱罗斯，还剩下 50 个苹果. ”

问题：爱罗斯原有多少个苹果?

答案：3360 个.

你算对了吗?