第 1 篇　复变函数

复数的概念起源于求方程的根，16 世纪中叶，G.Cardano(1501－1576)在研究一元二次方程时引进了复数的概念，在很长时间里，人们对这类数不能理解．但随着数学的发展，这类数的重要性才日益显现出来．

以复数作为自变量的函数叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论．解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论．

第 1 章　复数与复变函数

本章学习目标

- 熟练掌握复数的各种运算
- 掌握平面点集的有关概念
- 理解复变函数的概念
- 掌握复变函数的极限和连续的概念
- 了解一些简单映射的几何特征

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的概念

设 x, y 为两个任意实数，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数为复数，记为 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$，称为虚数单位．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}\,z,\quad y=\mathrm{Im}\,z.$$

当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，复数 $z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，复数 $z=x$ 为一个实数（实数可看作是复数的特殊情形）．例如，复数 $z=2+\mathrm{i}\cdot 0$ 就是实数 2，当 $x=y=0$ 时，复数 $z=0$，它既可以看作实数也可看作纯虚数．全体复数构成的集合称为复数集，记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}.$$

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是 $\mathbf{C}$ 中任意两个复数，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，称 z_1 与 z_2 相等，记作 $z_1=z_2$，即 $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$，$y_1=y_2$.

称复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数，复数 z 的共轭复数记作 $\overline{z}$，若 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

各数集之间的关系可表示为：
$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\\text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$$

1.1.2　复数的表示

1. 代数表示

$z=x+\mathrm{i}y$，x,y 为两个任意实数，就是复数的代数表示.

2. 复数的几何表示

由复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的定义可知，复数是由一对有序实数 (x,y) 唯一确定的，于是可建立全体复数和 xOy 平面上的全部点之间的一一对应关系，即可以用横坐标为 x，纵坐标为 y 的点 $P(x,y)$ 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（如图 1.1），这是一种几何表示法，通常称为点表示，并将点 z 与数 z 看作同义词.

因实数与 x 轴上的点一一对应，故称 x 轴为实轴；纯虚数与 y 轴上的点一一对应，故称 y 轴为虚轴．这样表示复数 z 的平面称为复平面或 Z 平面.

显然，共轭复数 z 和 $\overline{z}$ 在复平面上表示点 z 与点 $\overline{z}$ 关于实轴对称（如图 1.2).

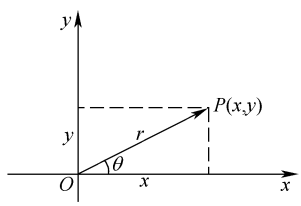


图 1.1

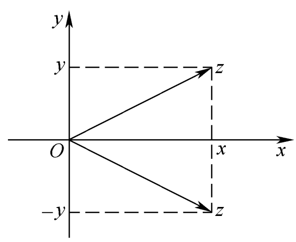


图 1.2

3. 复数的向量表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（如图 1.1)，x 与 y 分别是 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影．这样，复数与平面上的向量之间也建立了一一对应关系.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模，记作 $|z|$ 或 r，即

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} .$$

关于复数 z 的模 $|z|$ 有：

（1）$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$；　（2）$|z| = |\overline{z}|$，$z\overline{z} = |z|^2$；

（3）$|z| \leqslant |x|+|y|$，$|x| \leqslant |z|$，$|y| \leqslant |z|$；　（4）$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$；

（5）$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$；　（6）$|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$.

其中 $|z_1-z_2|$ 又表示点 z_1 与 z_2 之间的距离.

$\overrightarrow{OP}$ 与实轴正方向所夹的角 θ，称为复数 z 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z$，即

$$\theta = \operatorname{Arg} z .$$

并规定 θ 按逆时针方向取值为正，顺时针方向取值为负.

显然，一个复数的辐角有无穷多个，任意两个辐角，彼此之间相差 2π 的整数倍，其中满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0，称为复数 z 的辐角主值，记为 $\arg z$，即 $\theta_0 = \arg z$，于是有

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi ,$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

在确定辐角主值 $\arg z$ 时，必须考虑点 z 所在的象限：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0,\ y>0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0,\ y\geqslant 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0,\ y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y<0, \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

当 $z=0$ 时，规定 z 的模为 0，辐角无定义.

4. 复数的三角表示式与指数表示式

利用复数 $z = x+\mathrm{i}y$ 的实部、虚部、模与辐角的下列关系式：

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta ,$$

还可将复数表示为以下的形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

称为复数 z 的三角表示式.

由欧拉（Euler）公式　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，

复数 z 又可表示为 $z=re^{i\theta}$，称为复数 z 的指数表示式.

复数的各种表示可以互相转换，例如，将复数 $z=x+iy$ 化为三角表示式或指数表示式，只需计算 r 和 θ，即 $|z|$ 和 $\operatorname{Arg} z$，由 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，易求出 r 的值，再由 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，知

$$\tan\operatorname{Arg} z=\tan\theta=\frac{y}{x},$$

从而
$$\operatorname{Arg} z=\theta=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

例 1 求：（1）$z=1+\sqrt{3}i$；（2）$z=-\sqrt{12}-2i$ 的三角表示式与指数表示式.

解 （1）因为 $x=\operatorname{Re} z=1$，$y=\operatorname{Im} z=\sqrt{3}$，

所以
$$r=|z|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

设
$$\theta=\arg z，则 \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3},$$

又因为 $z=1+\sqrt{3}i$ 位于第 I 象限，所以 $\theta=\arg z=\dfrac{\pi}{3}$，

于是
$$z=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

（2）因为 $x=\operatorname{Re} z=-\sqrt{12}$，$y=\operatorname{Im} z=-2$，

所以
$$r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+(2)^2}=4,$$

因为 $z=-\sqrt{12}-2i$ 位于第III象限，

所以
$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=\frac{-5\pi}{6},$$

于是
$$z=-\sqrt{12}-2i=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

例 2 求 $z_1=3i$，$z_2=4$，$z_3=-2$，$z_4=-2i$ 的三角表示式与指数表示式.

解 z_1,z_2,z_3,z_4 都是复平面上的特殊点，位于虚轴或实轴上，因此辐角主值可直接求出.

由于 z_1 位于虚轴上，并且在上半复平面，于是 $\theta_1=\arg z_1=\dfrac{\pi}{2}$，又 $r_1=3$，

所以
$$z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3e^{i\frac{\pi}{2}};$$

z_2 位于实轴上，且在右半复平面，因此 $\theta_2=\arg z_2=0$，又 $r_2=4$，

所以
$$z_2=4(\cos 0+i\sin 0)=4e^{i0};$$

z_3 位于实轴上，且在左半复平面，因此 $\theta_3=\arg z_3=\pi$，又 $r_3=2$，

所以
$$z_3=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi};$$

z_4 位于虚轴上，且在下半复平面，于是 $\theta_4 = \arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$， $r_4 = 2$，

所以
$$z_4 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

1.1.3 复数的运算

设复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，定义 z_1 与 z_2 的四则运算如下：

加法：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$；

减法：$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$；

乘法：$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$；

除法：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$（$z_2 \neq 0$）.

注：复数的四则运算可理解为利用 $\mathrm{i}^2 = -1$ 和实数的四则运算所得.

复数四则运算规律：

（1）加法交换律　$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$；

（2）乘法交换律　$z_1 z_2 = z_2 z_1$；

（3）加法结合律　$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$；

（4）乘法结合律　$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$；

（5）乘法对于加法的分配律　$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

例 3　化简 $\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{2+\mathrm{i}}$.

解
$$\frac{(2+3\mathrm{i})^2}{2+\mathrm{i}} = \frac{4-9+12\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(-5+12\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$$
$$= \frac{-10+12+29\mathrm{i}}{4+1} = \frac{2+29\mathrm{i}}{5} = \frac{2}{5} + \frac{29}{5}\mathrm{i}.$$

例 4　设 $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \overline{\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{-5\mathrm{i}}\right)}$，求 $\mathrm{Re}\, z$，$\mathrm{Im}\, z$ 及 $z\bar{z}$.

解
$$z = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \left(\frac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\overline{-5\mathrm{i}}}\right) = \frac{(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} - \frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$$
$$= \frac{11-2\mathrm{i}}{25} - \frac{(2-\mathrm{i})(-5\mathrm{i})}{5\mathrm{i}(-5\mathrm{i})} = \frac{11-2\mathrm{i}}{25} + \frac{5+10\mathrm{i}}{25}$$
$$= \frac{16}{25} + \frac{8}{25}\mathrm{i}.$$

所以
$$\mathrm{Re}\, z = \frac{16}{25},\quad \mathrm{Im}\, z = \frac{8}{25}.$$

$$z\overline{z}=\left(\frac{16}{25}+\frac{8}{25}\mathrm{i}\right)\left(\frac{16}{25}-\frac{8}{25}\mathrm{i}\right)=\frac{64}{125}.$$

我们利用复数的三角表示式或指数表示式讨论复数的乘法与除法更简便.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

1.1.4 复数的乘方与方根

1. 复数的乘方

设 n 为正整数，n 个非零相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次方，记为 z^n，即

$$z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n}.$$

若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则有

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),$$

若规定 $z^0=1$，这个公式当 $n=0$ 时也成立.

当 $r=1$ 时，得到著名的棣莫弗（De Moivre）公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

当 n 为负整数时，$z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}=\dfrac{1}{r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

例 5 求 $(1+\mathrm{i})^6$.

解 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以 $(1+\mathrm{i})^6=8\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-8\mathrm{i}$.

例 6 已知 $z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，$z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1^8}{z_2^4}$.

解 因为 $z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$,

$$z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right],$$

所以
$$\frac{z_1^8}{z_2^4}=\frac{2^8\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)\right]}{2^4\left[\cos\left(\frac{20\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{20\pi}{6}\right)\right]}$$
$$=2^4\left[\cos\left(-\frac{28\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{28\pi}{6}\right)\right]$$
$$=-8(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) .$$

2. 复数的方根

称满足方程 $w^n=z$（$w\neq 0$，$n\geqslant 2$）的复数 w 为 z 的 n 次方根，记作 $w=\sqrt[n]{z}$ 或记作 $w=z^{\frac{1}{n}}$.

当 $z=0$ 时，$w=0$；当 $z\neq 0$ 时，令
$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)，\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)，$$
由棣莫弗公式，可得
$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)，$$
即有 $\rho^n=r$，$\cos n\varphi=\cos\theta$，$\sin n\varphi=\sin\theta$，也即
$$\rho^n=r，\ n\varphi=\theta+2k\pi \quad （k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots），$$
从而
$$\rho=r^{\frac{1}{n}}，\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \quad （k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots），$$
故
$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$
$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad （k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots）$$
为方程 $w^n=z$ 的全部根，当 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到方程 $w^n=z$ 的 n 个单根，这 n 个单根在几何上表示以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点，当 k 取其他整数值时，得到方程的根必与这 n 个单根中的某个根重合.

方程 $w^n=1$ （$n=2,3,\cdots$）在复数范围内有 n 个单根
$$w=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} \quad （k=0,1,2,\cdots,n-1）.$$
从几何上看，若设
$$w_n=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}，$$
方程 $w^n=1$ 的 n 个单根可记为
$$1, w_n, w_n^2, w_n^3,\cdots, w_n^{n-1} .$$

它们是单位圆内接正 n 边形的 n 个顶点，以 $n=3$ 为例作图（如图 1.3），$n=6$ 为例作图（如图 1.4）.

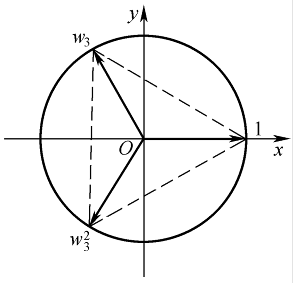


图 1.3

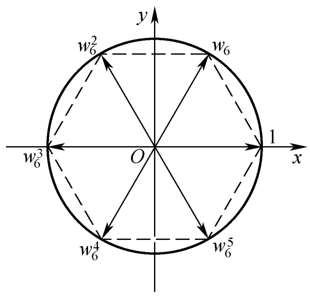


图 1.4

例 7 解方程 $z^6+1=0$．

解 因为 $z^6=-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$，

所以 $$\sqrt[6]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\quad（k=0,1,2,3,4,5）.$$

可求出 6 个根，它们是

$$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}，\ z_1=\mathrm{i}，\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}，$$

$$z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}，\ z_4=-\mathrm{i}，\ z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

例 8 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$．

解 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\quad（k=0,1,2,3）.$$

即 $$w_4^0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad w_4^1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_4^2=-\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad w_4^3=-\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right).$$

1.2 平面点集与区域

1.2.1 复平面上的点集与区域

在复数集中加入一个非正常的复数称为无穷大，记作 ∞，其实部、虚部与辐角都没有意义，但它的模规定为正无穷大，即 $|z|=+\infty$．相应地，在复平面上添加一点，称为无穷远点，它与原点的距离为 $+\infty$．

扩充复平面　包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

有限复平面　不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或复平面.

在高等数学课程中已经学习过平面点集的基本概念，下面将其推广到复平面上.

邻域　平面上以 z_0 为心，$\delta > 0$ 为半径的圆：$|x - z_0| < \delta$ 内部所有点的集合称为点 z_0 的 δ 邻域，记为 $N(z_0, \delta)$，即

$$N(z_0, \delta) = \{z \,|\, |z - z_0| < \delta\},$$

称集合 $\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 的去心 δ 邻域，记作 $N(\hat{z}_0, \delta)$.

内点　设 D 为平面上的一个点集，$z_0 \in D$，如果存在 z_0 的一个 δ 邻域，使该邻域内的所有点都属于 D，则称 z_0 为 D 的一个内点.

边界点　如果点 z_0 的任一邻域内既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点，则称 z_0 为 D 的边界点.

外点　平面上既非 D 的内点又非 D 的边界点的点，称为 D 的外点.

图 1.5 中 z_0, z_1, z_2 分别表示为 D 的内点、边界点和外点.

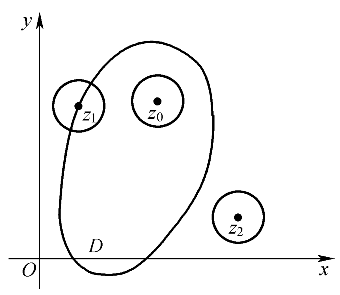


图 1.5

边界　点集 D 的全部边界点所组成的集合，称为 D 的边界.

注：D 的内点必属于 D；D 的外点必不属于 D；而 D 的边界点可能属于 D 也可能不属于 D.

开集　如果点集 D 的每一个点都是 D 的内点，则称 D 为开集.

闭集　如果点集 D 的余集为开集，则称 D 为闭集.

连通集　设 D 是开集，如果对于 D 内任意两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 D，则称开集 D 是连通集.

区域（或开区域）　连通的开集称为区域或开区域.

闭区域　开区域 D 连同它的边界一起，称为闭区域，记为 $\bar{D}$.

有界集、无界集　如果点集 D 可以包含在一个以原点为中心，以有限值为半径的圆内（即存在一个正数 M，使得对任意的 $z \in D$，都有 $|z| \leqslant M$），则称 D 为有界集，否则称 D 为无界集.

有界、无界区域（闭区域） 区域（闭区域）有界时，称为有界区域（有界闭区域），否则称为无界区域（无界闭区域）.

例如，圆盘：$|z-z_0|\leqslant r$ 为有界闭区域.

圆环：$r_1<|z-z_0|<r_2$ 为有界开区域.

上半平面：$\operatorname{Im} z>0$ 是无界开区域，$\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 是无界闭区域.

角形域：$0<\arg z<\varphi$ 是无界区域.

1.2.2 单连通域与多（复）连通域

1. 简单曲线、简单闭曲线

设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是闭区间$[\alpha,\beta]$上的实连续函数，则由方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

或由复数方程

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),（参数方程）$$

所确定的点集C 称为复平面（Z 平面）上的一条连续曲线.

若存在满足$\alpha\leqslant t_1\leqslant\beta$，$\alpha\leqslant t_2\leqslant\beta$ 且$t_1\neq t_2$ 的t_1 与t_2，使$z(t_1)=z(t_2)$，则称此曲线 C 有重点.

无重点的连续曲线称为简单曲线或约当（Jordan）曲线.

除 $z(\alpha)=z(\beta)$ 外无其他重点的连续曲线称为简单曲线．例如$z=\cos t+\mathrm{i}\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）是一条简单闭曲线（如图 1.6）.

在几何直观上，简单曲线自身是不会相交的；简单闭曲线是封闭的，例如，图 1.7 中的C_1是简单曲线，C_2是简单闭曲线，图 1.8 中的C_3,C_4不是简单曲线，但C_3是闭曲线.

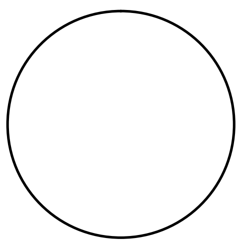


图 1.6

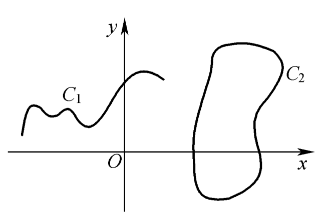


图 1.7

2. 光滑曲线、分段光滑曲线

设曲线C 的方程为

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

若 $x(t),y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上均有连续导数且$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则称曲线$C$ 为光滑曲线，由若干段光滑曲线衔接而成的曲线称为分段光滑曲线.

例如，摆线 $x(t)=a(t-\sin t)$，$y(t)=a(1-\cos t)$（$a>0$）的拱为一条光滑曲线，

星形线 $x(t)=a\cos^3 t$，$y(t)=a\sin^3 t\quad(a>0)$ 为分段光滑曲线.

3. 单连通域、多连通域

设 D 是复平面上一区域，如果在 D 内任作一条简单闭曲线 C，其内部的所有点都在 D 中，则称区域 D 为单连通区域；否则称 D 为多连通区域或复连通区域.

例如，左半平面 $\mathrm{Re}\,z<0$，水平带域 $y_1<\mathrm{Im}\,z<y_2$（$y_1,y_2\in\mathbf{R}$）；上半平面 $0<\arg z<\pi$，均为单连通区域；圆环域 $r_1<|z-z_0|<r_2$（r_1,r_2 为正实数）为多连通区域.

在几何直观上，单连通区域是一个没有“空洞（点洞）和缝隙”的区域，而多连通区域是有“洞或缝隙”的区域，它可以是由曲线 C 所围成的区域中挖掉几个洞，除去几个点或一条线段而形成的区域（如图 1.9）.

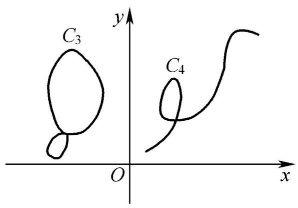


图 1.8

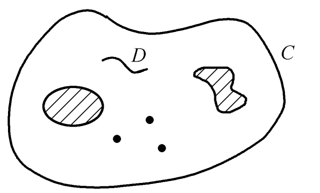


图 1.9

1.3 复变函数

1.3.1 复变函数的概念

定义 1 设 D 为给定的平面上的非空点集，若对于 D 中每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，按照某一确定的法则 f，总有确定的一个或几个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的复变函数（复变数 w 是复变数 z 的函数），简称复变函数，记作 $w=f(z)$. 其中 z 称为自变量，w 称为因变量，点集 D 称为函数的定义域.

如果给定一个函数 $w=f(z)$，但没有指明函数的定义域，此时约定该函数的定义域为复变数 z 所能取的使 $w=f(z)$ 有意义的值的集合.

当取 $z_0\in D$ 时，由 $w=f(z)$ 确定的值 $w_0=f(z_0)$ 称为复变函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处的函数值.

若一个 z 值对应着唯一一个 w 值，则称 $w=f(z)$ 为单值函数；若一个 z 值对应两个或两个以上 w 的值，则称 $w=f(z)$ 为多值函数.

例如，函数 $w=z^{\frac{1}{2}}$ 是定义在整个复平面上的多值函数；

$w=z^3$ 是定义在整个复平面上的单值函数；

$$w=\frac{1}{z}\text{，其中}\operatorname{Im}z>0\text{，是定义在上半平面的单值函数．}$$

设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则 $w=f(z)$ 可改写为

$$w=u+\mathrm{i}v=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\text{，}$$

其中 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 为二元实函数，比较上式的实部与虚部，得到

$$u=u(x,y)\text{，}\quad v=v(x,y)\text{，}$$

所以，一个复变函数 $w=f(z)$ 就对应着一对二元实变函数 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$，因而 $w=f(z)$ 的性质就取决于 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的性质．

例 9　将定义在全平面上的复变函数 $w=z^2$ 化为一对二元实变函数．

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，代入 $w=z^2$，得

$$w=u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy\text{，}$$

比较实部与虚部得

$$u=x^2-y^2\text{，}\quad v=2xy\text{．}$$

例 10　将定义在除原点外全平面区域上的复变函数 $w=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ 化为一对二元实变函数．

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则 $w=u+\mathrm{i}v=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\dfrac{4xy\mathrm{i}}{x^2+y^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，

比较实部与虚部得

$$u=\frac{2xy}{x^2+y^2}\text{，}\quad v=0\text{．}$$

1.3.2　映射的概念

在高等数学中，常将函数用几何图形表示出来，给研究函数的性质提供了许多直观的帮助．若将复变函数也用图形来表示，就需要通过两个复平面上的点集之间的对应关系来给出（因为自变量 z 和函数 w 都是复数）．

如果复数 z 和 w 分别用 Z 平面和 W 平面上的点表示，则函数 $w=f(z)$ 在几何上，可以看成是将 Z 平面上的定义域 D 变到 W 平面上的函数值域 G 的一个变换或映射，它将 D 内的一点 z 变为 G 内的一点 $w=f(z)$（如图 1.10）．

例 11　讨论 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 Z 平面上的直线 $x=1$ 映射成 W 平面上的怎样一条曲线．

解　$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$，$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，

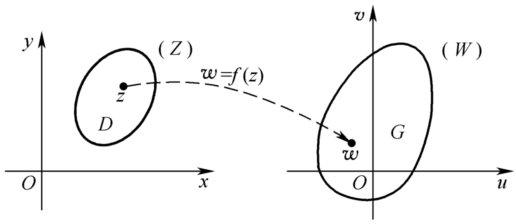


图 1.10

将 $x=1$ 代入 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$， $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ 并消去 y 得

$$v^2+\left(u-\frac{1}{2}\right)^2=1,$$

所以 $x=1$ 的像是 W 平面上的一个圆.

例 12 讨论函数 $w=z^2$ 将 Z 平面上的扇形区域

$$0<\theta<\frac{\pi}{4}, \qquad 0<r<2$$

映射成 W 平面上的怎样的区域.

解 函数 $w=z^2$ 将 Z 平面上的扇形区域

$$0<\theta<\frac{\pi}{4}, \qquad 0<r<2$$

映射成 W 平面上的扇形区域（如图 1.11）

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}, \qquad 0<\rho<4\ .$$

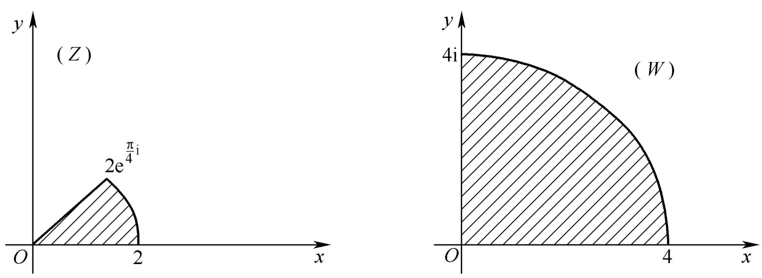


图 1.11

1.3.3 反函数与复合函数

1. 反函数

定义 2 设 $w=f(z)$ 定义在 Z 平面的点集 D 上，函数值集合 G 在 W 平面上.若

对任意$z \in D$，在G内有确定的w与之对应．反过来，若对任意一点$w \in G$，通过法则$f(z)=w$，总有确定的$z \in D$与之对应，按照函数的定义，在G中确定了z为w的函数，记作$z=f^{-1}(w)$，称为函数$w=f(z)$的反函数，也称为映射$w=f(z)$的逆映射．

例如，$w=2z-3$的反函数为$z=\dfrac{w+3}{2}$．

2．复合函数

定义 3 设函数$w=f(h)$的定义域为D_1，函数$h=\varphi(z)$的定义域为D_2，值域$G \subset D_1$．若对任意一点$z \in D_2$，通过$h=\varphi(z)$有确定的$h \in G \subset D_1$与之对应，从而通过$w=f(h)$有确定的w值与z对应，按照函数的定义，在D中确定了w是z的函数，记作$w=f[\varphi(z)]$，称其为$w=f(h)$与$h=\varphi(z)$的复合函数．

例如，函数$v=\dfrac{1}{w}$（$w \neq 0$）与$w=3z+1$的复合函数为$v=\dfrac{1}{3z+1}$．

1.4 复变函数的极限与连续性

1.4.1 复变函数的极限

定义 4 设函数$f(z)$在z_0的某去心邻域内有定义，若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在数$\delta>0$，使得适合不等式$0<|z-z_0|<\delta$的所有z，对应的函数值$f(z)$都满足不等式$|f(z)-A|<\varepsilon$，则称复常数A为函数$f(z)$当$z \to z_0$时的极限，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=A \quad \text{或} \quad f(z) \to A \quad (z \to z_0).$$

注： 定义中z趋近于z_0的方式是任意的．

极限定义的几何意义可解释为：无论点A的ε邻域取得多么小，总可以找到z_0的一个去心δ邻域，当变量z落在z_0的去心δ邻域内（如图 1.12），函数$f(z)$的值便落入A的ε邻域内（如图 1.13）．

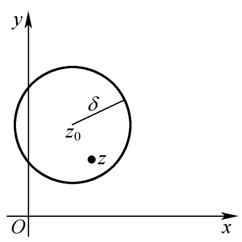


图 1.12

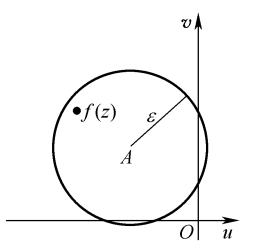


图 1.13

定理 1 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+\mathrm{i}v_0$ 的充分必要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0 \quad 且 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0 .$$

此定理告诉我们，复变函数极限的存在性等价于其实部、虚部两个二元实函数极限的存在性，这样就把复变函数的极限转化为求该函数的实部与虚部的极限，也就是求两个二元实函数的极限．因此，实变函数中的那些关于极限的运算性质，对于复变函数依然成立．譬如，复变函数的极限四则运算法则，可叙述为：

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$， $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

（1） $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=A\pm B$；

（2） $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=AB$；

（3） $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）．

例 13 试求下列函数的极限：

（1） $\lim\limits_{z\to 1+\mathrm{i}}\dfrac{z+1}{z\bar{z}}$；　　（2） $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{z-1}$．

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，

（1） $\lim\limits_{z\to 1+\mathrm{i}}\dfrac{z+1}{z\bar{z}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x+1+\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\left[\dfrac{x+1}{x^2+y^2}+\dfrac{\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right]=1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$；

（2） $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{z-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)(z+1)}{z-1}=\lim\limits_{z\to 1}(z+1)=2$．

1.4.2 复变函数的连续

定义 5 设 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续．

若 $f(z)$ 在区域 D 内每一个点都连续，则称函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续．

由定理 1 及定义 5 得如下定理：

定理 2 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续．

由此又有以下定理：

定理 3 在 z_0 处连续的两个函数的和、差、积、商（分母在 z_0 处不等于零）在 z_0 处仍连续．

显然，关于 z 的多项式函数 $w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 在复平面上所有的点处都连续，而有理分式函数 $w=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$（$P(z),Q(z)$ 都是多项式）在复平面上

除使分母为零的点外都连续.

例 14 讨论函数 $w=\arg z$ 的连续性.

解 设 z_0 为复平面上任意一点，则：

当 $z_0=0$ 时，$\arg z$ 在 z_0 无定义，故 $\arg z$ 在 $z_0=0$ 处不连续.

当 z_0 落在负实轴上时，由于 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，在 z 从实轴上方趋于 z_0 时，$\arg z$ 趋于 π，在 z 从实轴下方趋于 z_0 时，$\arg z$ 趋于 $-\pi$，所以 $\arg z$ 不连续. 当 z_0 为其他情况时，由于 $\lim\limits_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0$，所以 $\arg z$ 连续.

定理 4 若函数 $h=g(z)$ 在点 z_0 处连续，函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续（证略）.

复变连续函数也有与实元连续函数类似的性质.

定理 5 设 $f(z)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 必有界，且可以取得最大值和最小值.

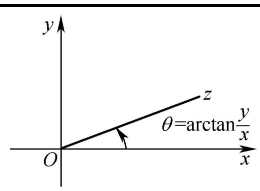
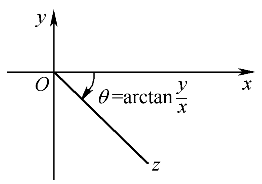
本章小结

本章主要研究了复数的定义、运算、表示式、平面点集、区域、复变函数以及复变函数的极限与连续等，为加深对这些概念的理解，现归纳总结如下：

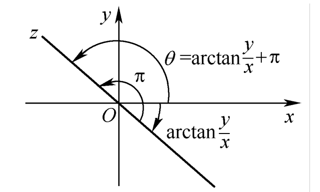
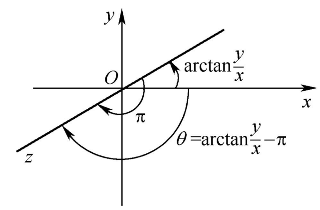
一、复数是不能比较大小的；非零复数开 n 次方有 n 个不同的根.

二、复数有各种表示式，如代数式、三角式、指数式，根据研究问题的不同，选择不同的表示式，如在加、减运算时用代数式，在乘、除或开方运算时用三角式或指数式较简便，指数式的应用最为广泛.

三、由复数的代数式求其辐角或在代数式与三角式的相互转化时可利用关系式 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，但不能认为总有 $\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}$，两者的关系如下表：

辐角主值	x,y 取值范围	反正切表示式	图形
$\theta=\arg z$ $(z\neq 0)$ $-\pi<\arg z\leqslant\pi$	$x>0$ $y>0$	$\arctan\dfrac{y}{x}$	
	$x>0$ $y<0$	$\arctan\dfrac{y}{x}$	

续表

<table>
<tr><th>辐角主值</th><th>x, y 取值范围</th><th>反正切表示式</th><th>图形</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\theta = \arg z$
$(z \neq 0)$
$-\pi < \arg z \leqslant \pi$</td><td>$x < 0$
$y > 0$</td><td>$\arctan \dfrac{y}{x} + \pi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x < 0$
$y < 0$</td><td>$\arctan \dfrac{y}{x} - \pi$</td><td>
</td></tr>
</table>

四、邻域和聚点是平面点集的两个最基本的概念，平面点集的很多概念都可以用它们来定义.

五、复变函数的定义、极限、连续及有关定理与实函数相应的概念、定理在表述上几乎是相同的，对定理的证明方法也很类似.

六、在研究复变函数 $f(z)$ 时，经常将其化成 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的形式，将对 z 的一元复函数 $f(z)$ 的研究转化为对两个二元实函数 $u(x,y), v(x,y)$ 的研究，例如要研究 $f(z)$ 在点 z_0 的极限或连续性，可转化为研究 $u(x,y), v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的极限或连续性.

习题一

1．将下列复数表示成代数形式：

（1）$\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}}$；　　（2）$\dfrac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}$.

2．求下列复数的模、辐角主值：

（1）$\sqrt{3}+\mathrm{i}$；　（2）$-1-\mathrm{i}$；　（3）$\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

3．将下列复数表示成三角表示式和指数表示式：

（1）$z=(1+\mathrm{i})^6$；　　（2）$z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；

（3）$z=3\mathrm{i}$；　　（4）$z=-1$.

4．计算：

（1）$(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^6$；　　（2）$(1-\mathrm{i})^4$；

（3）$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$；　　（4）$\sqrt[6]{-2\mathrm{i}}$.

5．试求方程 $z^4+a^4=0$（$a>0$）的根．

6．求下列各式中 z 的范围并做草图：

（1）$|z+\mathrm{i}|=1$；（2）$\mathrm{Re}\ (z+3)=1$；

（3）$\left|\dfrac{z-1}{z+2}\right|=2$；（4）$|z+2\mathrm{i}|\geqslant 1$；

（5）$\mathrm{Im}\,z\leqslant 5$；（6）$0<\arg<\pi$．

7．写出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 形式．

8．在映射 $w=z^2$ 之下，Z 平面上的曲线 C：$\mathrm{Re}\,z=1$ 映射成 W 平面上的什么曲线？

9．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{i}z^3-1}{z+\mathrm{i}}$；（2）$\lim\limits_{z\to 1-\mathrm{i}}\dfrac{4z^2}{(z-1)^2}$．

10．证明极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{z}$ 不存在．

11．求下列函数的定义域，并判断这些函数是否都是定义域中的连续函数：

（1）$w=z^3$；（2）$w=\dfrac{2z-1}{z-2}$．

12．证明：若函数 $f(z)$ 是连续函数，则 $\overline{f(z)}$ 也是连续函数．

自 测 题 一

一、填空题

1．设复数 $z=\dfrac{2}{1-2\mathrm{i}}$，则其实部为________，虚部为_______，模为________．

2．设复数 $\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，则 x =________，y =________．

3．设复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$，则复数 z 的三角表示式为________，指数表示式为________．

4．当 z 满足________条件时，$\dfrac{z}{z^2+1}$ 是实数．

5．$\arg(-3+4\mathrm{i})=$________，$\arg(-2-2\mathrm{i})=$________．

二、计算题

1．将下列复数 z 表示成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式，并求出它的实部、虚部、共轭复数、模与辐角：

（1）$\dfrac{3}{1-2\mathrm{i}}$；（2）$\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$．

2．将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

（1）$-3-4\mathrm{i}$；（2）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$．

3．计算下列各题：

（1）$(1+\mathrm{i})^{10}$；（2）$\sqrt[6]{-1}$；（3）$\sqrt[3]{1-\mathrm{i}}$．

三、设 n 为正整数，证明 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}=-1$．

四、证明极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}\,z^2}{|z|^2}$ 不存在.

五、考查函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 在圆域 $|z|<1$ 内的连续性.