第 2 章　矩阵及其运算

2.1　内 容 提 要

2.1.1　矩阵的基本概念

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵．记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示矩阵．a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素．有时为了表明一个矩阵的行数和列数，用 $A_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵．

2. 几种特殊形式的矩阵

（1）行矩阵与列矩阵

只有一行的矩阵 $A=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ 称为行矩阵，又称行向量．

只有一列的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵，又称列向量．

（2）同型矩阵与矩阵相等

两个矩阵行数相等、列数也相等时，称为同型矩阵．

如果矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n),$$

那么就称这两个矩阵相等．记作 $A=B$．

（3）零矩阵

元素都是零的矩阵称为零矩阵．记作 $O_{m\times n}$ 或 O．注意不同型的零矩阵是不同的．

（4）方阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵．n 阶方阵 A 也记作

A_n. 即

$$A=A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 称为主对角线元素.

（5）上（下）三角矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角线以下（以上）元素全为零，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{或} A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$，则称 A 为上（下）三角矩阵. 上（下）三角矩阵通称三角矩阵.

（6）对角矩阵

如果方阵 A 除主对角线元素外全为零，即形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$，则称方阵 A 为 n 阶对角矩阵.

n 阶对角矩阵也记作 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\mathrm{diag}$（$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_n$）.

（7）单位矩阵

如果对角矩阵 A 的主对角线的元素全为 1，即 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，则称 A 为 n 阶单位矩阵. n 阶单位矩阵一般记作 E 或 E_n.

2.1.2 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵加法满足下列运算规律（设 A，B，C 都是 $m\times n$ 矩阵）：

（1）$A+B=B+A$；

（2）$(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. 数与矩阵的乘法

（1）定义

数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

（2）数乘矩阵满足下列运算规律（设 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，λ，μ 为数）：

① $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$；

② $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

③ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

3. 矩阵与矩阵的乘法

（1）定义

设矩阵 A 是一个 $m\times s$ 矩阵，$A=(a_{ij})_{m\times s}$，B 是一个 $s\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵，$C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$），并把此乘积记作 AB.

注意：只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

（2）矩阵的乘法满足的运算规律：

① $(AB)C=A(BC)$；

② $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，其中 λ 为数；

③ $A(B+C)=AB+AC$（左分配律），

$(B+C)A=BA+CA$（右分配律）.

（3）矩阵的幂

① 定义

设 A 是 n 阶方阵，定义 $A^1=A$，$A^2=AA$，$\cdots$，$A^k=A^{k-1}A=\underbrace{AA\cdots AA}_{k}$，其中 k 为正整数，称为方阵 A 的幂.

②矩阵的幂满足的运算规律：

$A^kA^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$（其中 k，l 为正整数）.

4. 矩阵的转置

（1）定义

把矩阵 A 的行换成同序号的列得到的一个新矩阵，叫做矩阵 A 的转置矩阵，记作 A^T 或 A' .

（2）矩阵的转置满足的运算规律：

① $(A^T)^T = A$；

② $(A+B)^T = A^T + B^T$；

③ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$；

④ $(AB)^T = B^T A^T$.

（3）对称矩阵的定义

设矩阵 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T = A$，即 $a_{ij} = a_{ji}(i，j=1, 2，\cdots，n)$，那么 A 称为对称矩阵.

（4）反对称矩阵的定义

设矩阵 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T = -A$，即 $a_{ij} = -a_{ji}(i，j=1, 2，\cdots，n)$，那么 A 称为反对称矩阵.

5. 方阵的行列式

（1）定义

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（每个元素的位置不变），称为方阵 A 的行列式．记作 $|A|$ 或 $\det A$.

注：方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵 A 是 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是这些数（也就是数表 A）按一定的运算法则所确定的一个数.

（2）方阵的行列式满足的运算规律：

① $|A^T| = |A|$；

② $|\lambda A| = \lambda^n |A|$；

③ $|AB| = |A||B| = |BA|$.

6. 方阵 A 的伴随矩阵

（1）定义

由 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的 n 阶方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，简称伴随阵．行列式 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 也称为方阵 A 的代数余子式．

（2）方阵 A 的伴随矩阵满足下列性质：

① $AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E$；

② $|A^*|=|A|^{n-1}$（$n\geqslant 2$，n 为正整数）；

③ 若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$；

④ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$（$n\geqslant 3$，n 为正整数）．

7．共轭矩阵

（1）定义

设 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵，$\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$，$\overline{A}$ 称为 A 的共轭矩阵．

（2）共轭矩阵满足的运算规律：

① $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$；

② $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\ \overline{A}$；

③ $\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$．

2.1.3　逆矩阵

1．逆矩阵的定义

设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=E$，则称方阵 A 可逆，B 称为 A 的逆矩阵．记作 $B=A^{-1}$．

注意：若 $AB=BA=E$，则有 $BA=AB=E$，所以 B 是可逆矩阵，且 $A=B^{-1}$．这表明可逆矩阵是成对出现的，满足 $AB=BA=E$ 的 A 与 B 互为逆矩阵．

2．方阵 A 可逆的充分必要条件及 A^{-1} 的求法

定理 1　若矩阵 A 可逆，则 $|A|\neq 0$，即 $AA^*=A^*A=|A|E$ 为非奇异矩阵．

定理 2　若 $|A|\neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，其中，A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵．

推论　若方阵 A，B 满足 $AB=E$（或 $BA=E$），则 A，B 都可逆，且 $B=A^{-1}$，$A=B^{-1}$．

3．可逆矩阵的性质

设 A，B 为同阶方阵，λ 为数，则下列逆矩阵的运算规律成立：

① 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$，$\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$；

② 若 A 可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$；

③ 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$；

④ 若 A，B 为同阶可逆方阵，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

2.1.4 矩阵分块法

1．分块矩阵的概念

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

2．分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似.

3．分块对角矩阵

（1）定义

设 A 为 n 阶矩阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i(i=1，2，\cdots，s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵.

（2）分块对角矩阵的性质

① $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

② 若 $A_i(i=1,2,\cdots，s)$ 都可逆，则 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

2.2 精选题型

例 1 设 $A=(1\quad 2)$，$B=(2\quad 1)$，$C=A^TB$，则 $C^{99}=$________________.

解 $C=A^TB=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(2\quad 1)=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$，$BA^T=(2\quad 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=4$，

于是

$$C^{99}=(A^TB)(A^TB)\cdots(A^TB)=A^T(BA^T)(BA^T)\cdots(BA^T)B=A^T(BA^T)^{98}B=4^{98}A^TB$$
$$=4^{98}\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}.$$

例 2 设 A 是三阶可逆矩阵，且 $|A|=3$，则

（1）$|2A^{-1}|=$________；

（2）$|A^*|=$________；

（3）$|(A^*)^*|=$________；

（4）$|(A^*)^{-1}|=$________；

（5）$|5A^{-1}-2A^*|=$________；

（6）$|(2A)^*|=$________；

（7）$|4A-(A^*)^*|=$________.

解 （1）$|2A^{-1}|=2^3|A|^{-1}=\dfrac{8}{3}$；

（2）$|A^*|=|A|^2=9$；

（3）$|(A^*)^*|=\left||A|^{3-2}A\right|=\left||A|A\right|=|3A|=3^3|A|=81$；

（4）$|(A^*)^{-1}|=\left|\dfrac{A}{|A|}\right|=\dfrac{1}{|A|^3}|A|=\dfrac{1}{|A|^2}=\dfrac{1}{9}$，

另解：由（2）知 $|A^*|=9$，故 $|(A^*)^{-1}|=\dfrac{1}{|A^*|}=\dfrac{1}{9}$ ；

（5）$|5A^{-1}-2A^*|=\left|5A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=|-A^{-1}|=(-1)^3\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{3}$；

（6）由 $AA^*=|A|E$，得 $(kA)(kA)^*=|kA|E$，故 $(kA)^*=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*$（$k\neq 0, A$ 可逆）. $|(2A)^*|=|2^{3-1}\bullet A^*|=|4\bullet A^*|=4^3|A^*|=4^3\times 9=576$；

（7）$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，则当 $n=3$ 时，$|4A-(A^*)^*|=|4A-3A|=|A|=3$.

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$，$B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$________.

解 $B=A^2-3A+2E=(A-2E)(A-E)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix}$，

则 $|B|=2$，而 $B^*=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-2\end{pmatrix}$，

所以，$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

例 4 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$.

（1）证明 $A-E$ 为可逆矩阵，其中 E 为 n 阶单位矩阵；

（2）已知 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A .

（1）**证明** 由 $A+B=AB$ 可得 $AB-A-B=O$ ，所以 $AB-A-B+E=E$. 从而 $(A-E)(B-E)=E$ ，所以 $A-E$ 为可逆矩阵.

（2）**解** 由（1）知 $A-E=(B-E)^{-1}$，所以 $A=(B-E)^{-1}+E$ ，而

$$B-E=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

解得 $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

因此，$A=(B-E)^{-1}+E=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

例 5 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\ 3x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$ 的系数矩阵为 A ，三阶矩阵 $B\neq O$ ，且 $AB=O$ ，试求 λ 的值.

解 将 B 按列分块，设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ，则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3)=(O,O,O).$$

所以 $A\beta_i=O\ (i=1,2,3)$ ，是齐次线性方程组 $Ax=O$ 的解.

因为 $B\neq O$ ，所以 $Ax=O$ 有非零解，即 $|A|=0$.

$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & \lambda-1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0$ ，所以 $\lambda=1$.

2.3 习题解答

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\\-2&1\end{pmatrix}$，求 $2A-3B$.

解 $2A=\begin{pmatrix}2&-2\\4&6\\0&2\end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix}9&12\\15&6\\-6&3\end{pmatrix}$, $2A-3B=\begin{pmatrix}-7&-14\\-11&0\\6&-1\end{pmatrix}$.

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\\1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\end{pmatrix}$，求 AB，AA^T，A^TA-2B .

解

$$AB=\begin{pmatrix}4&-1\\-3&-3\\5&-2\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&13&4\\3&4&5\end{pmatrix},$$

$$A^TA-2B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\\1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&0\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\-5&16\end{pmatrix}.$$

3．设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{pmatrix}$，求 $-A^T+2B$，AB，BA .

解 $A^T=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$-A^T+2B=-\begin{pmatrix}0&2\\1&1\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\\1&2\end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\4&-2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

4．计算下列乘积．

（1）$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$；（4）$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$．

解　（1）$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times 4+0\times(-2)+1\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & -6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$．

5．计算．

（1）$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^n$；（2）$\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\end{pmatrix}^n$；（3）$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$．

解　（1）$A^1=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$，

$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$，

$A^3=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{pmatrix}$，

猜测 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

假设当 $n=k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix},$$

所以，$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

（2）当 $n=2m$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^m c^m & 0 & 0 \\ 0 & b^{2m} & 0 \\ 0 & 0 & a^m c^m \end{pmatrix}$,

当 $n=2m+1$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{m+1}c^m \\ 0 & b^{2m+1} & 0 \\ a^m c^{m+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$（其中 m 为非负整数）.

（3）$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n=\lambda^{n-2}\begin{pmatrix} \lambda^2 & n\lambda & \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & n\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

6．设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$，（1）计算 AA^T；（2）利用（1）的结果，求 $|A|$.

解　（1）

$$AA^T=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

（2）由（1）得 $\left|AA^T\right|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$，因为 $\left|AA^T\right|=|A|\left|A^T\right|=|A|^2$，故有 $|A|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

7．设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $|A|$，A^*，AA^*.

解　$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=11$，$A^*=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$AA^*=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

8．设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\3&0&2\\1&-2&-3\end{pmatrix}$，求 $|-2A|$，A^*，AA^*．

解　$|A|=-37$，故有 $|-2A|=296$，

$$A^*=\begin{pmatrix}4&-13&-2\\11&-8&13\\-6&1&3\end{pmatrix}，AA^*=|A|E=\begin{pmatrix}-37&0&0\\0&-37&0\\0&0&-37\end{pmatrix}.$$

9．判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵．

（1）$\begin{pmatrix}1&2\\-3&8\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1&4&-3\\2&1&0\\1&-3&3\end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-1&1\\3&-1&2\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$；　（6）$\begin{pmatrix}5&2&0\\3&1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$；

（7）$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&5&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}$．

解　本题所给矩阵均记为 A．

（1）$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\-3&8\end{vmatrix}=14\neq0$，故 A 可逆，$A^*=\begin{pmatrix}8&-2\\3&1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{3}{14}&\frac{1}{14}\end{pmatrix}$．

（2）$|A|=\begin{vmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}=1\neq0$，故 A 可逆，$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$．

（3）$|A|=\begin{vmatrix}1&4&-3\\2&1&0\\1&-3&3\end{vmatrix}=0$，故 A 不可逆．

（4）$|A|=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&-1&1\\3&-1&2\end{vmatrix}=4\neq0$，故 A 可逆．

又因为 $A_{11}=-1$，$A_{21}=-5$，$A_{31}=3$，$A_{12}=1$，$A_{22}=-3$，$A_{32}=1$，$A_{13}=2$，

$A_{23}=6$，$A_{33}=-2$，

所以 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-5&3\\1&-3&1\\2&6&-2\end{pmatrix}$.

由 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A*$，可得 $A^{-1}=\dfrac{1}{4}A^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（5）$|A|=1\neq 0$，故 A 可逆.

$$A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

（6）$|A|=4\neq 0$，故 A 可逆，$A^*=\begin{pmatrix}-4&8&0\\12&-20&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&-5&0\\0&0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

（7）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&5&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}$，将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$，因为 $|A_1|=1\neq 0$，$|A_2|=-1\neq 0$，故它们可逆，$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$. 于是由对角矩阵的性质，有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&2&-1\end{pmatrix}.$$

10．解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$；

（4）$AX=A+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

解 （1）$X=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ -5 & 2 & 1\\ -2 & -7 & -10\end{pmatrix}$，

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ -5 & 2 & 1\\ -2 & -7 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，

故 $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -11 & -6\\ -20 & -13\end{pmatrix}$.

（4）$AX=A+2X$

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

11．设 A 为三阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$ 的值.

解 $AA^*=|A|E\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$，$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$.

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{|A|}=-\frac{16}{27}.$$

12．设 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

解　由 $A^2-A-2E=O$，得 $A(A-E)=2E$，即 $A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]=E$，故 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=O$，得 $(A+2E)(A-3E)=-4E$.

故 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

13．证明：（1）若 $A^2=A$，且 A 不是单位矩阵，则 A 必为奇异矩阵；

（2）若 $AB=O$，且 A 可逆，则必有 $B=O$.

证明　（1）用反证法. 假设 A 为非奇异矩阵，则 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆，则 A^{-1} 存在，用 A^{-1} 左乘 $A^2=A$，得 $A=E$，与题设矛盾，所以 A 不可逆，即 A 为奇异矩阵.

（2）A 可逆，则 A^{-1} 存在. 用 A^{-1} 左乘 $AB=O$，得 $B=O$.

2.4　同步测试题

一、填空题

1．设 A 是三阶矩阵，且 $|A|=3$，则 $|-2A|=$__________，$\left|A^2\right|=$__________，$\left|(2A)^{-1}\right|=$__________，$AA^*=$__________.

2．设 A 是三阶矩阵，且 $|A|=-2$，把 A 按列分块为 $A=(A_1\quad A_2\quad A_3)$，其中 $A_j\,(j=1,2,3)$ 是 A 的第 j 列，则 $|A_1\quad 2A_2\quad -A_3|=$__________，$|A_1\quad 2A_3\quad A_2|=$__________，$|A_3-2A_1\quad 2A_2\quad A_1|=$__________.

3．设 A 是三阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $\left|2(A^{-1})^2-(2A^{-1})^2\right|=$__________.

4．$(AB)^T=$__________.

5．设 A，B，C 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1}=$__________，$(ABC)^{-1}=$__________.

6．$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=$__________，$\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&9\end{pmatrix}^{-1}=$__________.

7. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ = ________.

解 1. $|-2A| = (-2)^3|A| = -8\times 3 = -24$，$|A^2| = |A||A| = 3\times 3 = 9$，

$|(2A)^{-1}| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{|A|} = \frac{1}{8}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{24}$，$AA^* = |A|A = 3E = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

2. 因为 $|A| = -2$，$|A_1 \quad 2A_2 \quad -A_3| = -2|A| = 4$，$|A_1 \quad 2A_3 \quad A_2| = -2|A| = 4$，$|A_3 - 2A_1 \quad 2A_2 \quad A_1| = -2|A| = 4$.

3. $|2(A^{-1})^2 - (2A^{-1})^2| = |-2(A^{-1})^2| = (-2)^3|(A^{-1})^2| = (-2)^3\frac{1}{|A|^2} = -2$.

4. $B^T A^T$.

5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，将 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1 = (-3)$，$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$，

$A_1^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)$，$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$.

于是由对角矩阵的性质，有 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$.

二、单选题

1. 设 A，B 为 n 阶矩阵，则下列等式成立的是（　　）.

A. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$　　　B. $(AB)^2 = A^2B^2$

C．$A^2-E=(A-E)(A+E)$　　D．$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

2．设 A，B 为 n 阶矩阵，则下列等式成立的是（　　）．

A．$AB=BA$　　B．$|AB|=|BA|$

C．$|A+B|=|A|+|B|$　　D．$|3AB|=3|A||B|$

3．设 A，B，C 均为 n 阶矩阵，则下列结论正确的是（　　）．

A．若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，则 $B=C$

B．若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$

C．$|A-B|=|A|-|B|$

D．$|(AB)^2|=|A|^2|B|^2$

4．设 A，B 为 n 阶可逆矩阵，则下列等式错误的是（　　）．

A．$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$　　B．$|(AB)^{-1}|=|A^{-1}||B^{-1}|$

C．$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　D．$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

5．若 n 阶矩阵 A 可逆，则 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=$（　　）．

A．A　　B．$|A|A$

C．$\dfrac{A}{|A|}$　　D．$\dfrac{A}{|A|^{n-1}}$

6．设 A 为 n 阶矩阵，k 为常数，若 $|A|=a$，则 $|kAA^T|=$（　　）．

A．ka^2　　B．k^2a

C．k^2a^2　　D．k^na^2

7．设 n 阶矩阵 A，B，C 满足关系式 $ABC=E$，则等式（　　）成立．

A．$BCA=E$　　B．$BAC=E$

C．$ACB=E$　　D．$CBA=E$

解　1．C　　2．B　　3．D　　4．C

5．若 A 可逆，则 $A^*\dfrac{A}{|A|}=\dfrac{A}{|A|}A^*=E$，从而 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$．故选 C．

6．$|kAA^T|=k^n|AA^T|=k^n|A||A^T|=k^n|A|^2=k^na^2$，故选 D．

7．由于 $ABC=E$，$|A||B||C|=1$，即 A，B，C 均可逆．问题转化为 $ABC=E$ 两边同乘以 A，B，C 的部分逆方阵，得到恒等变形．由于 B 在中间，不可能乘 B^{-1}，可考虑在 $ABC=E$ 的两边同时左乘 A^{-1} 再右乘 A 或两边同时右乘 C^{-1} 再左乘 C，即有 $A^{-1}(ABC)A=A^{-1}EA\Rightarrow BCA=E$ 或 $C(ABC)C^{-1}=CEC^{-1}\Rightarrow CAB=E$，故只有 A 成立．

三、计算题

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\1&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}$，求 AB，A^TA+B．

解 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\10&9\\6&11\end{pmatrix}$，

$$A^TA+B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&6\\6&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&8\\7&13\end{pmatrix}.$$

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$，求 $3AB-B^T$．

解 $3AB-B^T=3\begin{pmatrix}6&6\\5&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&17\\15&-8\end{pmatrix}$．

3． $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}．

解 对于矩阵 A， $|A|=2\neq0$，所以矩阵 A 可逆．

因为

$$\begin{aligned}&A_{11}=2, &&A_{21}=6, &&A_{31}=-4,\\&A_{12}=-3, &&A_{22}=-6, &&A_{32}=5,\\&A_{13}=2, &&A_{23}=2, &&A_{33}=-2,\end{aligned}$$

所以

$$A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},$$

从而

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

4．设 $AB=A+2B$，且 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求 B．

解 由 $AB = A + 2B$，得 $B = (A-2E)^{-1}A$，

$$(A-2E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}，\quad (A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}，$$

$$B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5．解矩阵方程：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

四、证明题

1．设 A 是 n 阶矩阵，且 $A^2 = O$，证明 $E - A$ 可逆，并求其逆矩阵.

2．设方阵 A 满足 $A^2 - 3A - 10E = O$，证明 $A - 4E$ 可逆，并求其逆矩阵.

证明

1．由 $A^2 = O$，得 $A^2 - E + E = O$，$E - A^2 = E$，即 $(E+A)(E-A) = E$.

所以，$E - A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1} = E + A$.

2．由 $A^2 - 3A - 10E = O$，得 $(A+E)(A-4E) = 6E$，$\dfrac{1}{6}(A+E)(A-4E) = E$.

所以，$A - 4E$ 可逆，且 $(A-4E)^{-1} = \dfrac{1}{6}(A+E)$.

2.5 自我测验及答案

一、填空题

1．设 A 为四阶方阵，$|A| = 2$，则 $|3A| =$ __________.

2．设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1} =$ __________.

3．设 A^* 是四阶方阵 A 的伴随矩阵，若 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$__________.

4．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$__________.

5．已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$，设 $A=\alpha^T\beta$，其中 α^T 是 α 的转置，则 $A^n=$__________.

二、计算题

1．设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$，求 AB，BA，$A^2-5A+2E$．

2．设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵，求 $B^{2004}-2A^2$．

3．当 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$时，$A^6=E$，求 A^{11}．

4．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $|AB-BA|$，$|-6B|$．

5．已知 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X．

6．设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵.

答案：

一、

1．162；

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；

3. $\frac{32}{81}$；

4. $(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$；

5. $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

二、

1. $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， $BA=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$， $A^2-5A+2E=\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$；

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；

3. $A^{11}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；

4. $|AB-BA|=32$， $|-6B|=-216$；

5. $X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$；

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.