第一部分　课后习题详解

第 7 章　向量代数与空间解析几何

习题 7.1

1．在空间直角坐标系中作出具有下列坐标的点：

$A(2,3,4)$；$B(1,2,-1)$；$C(-2,2,2)$；$D(2,-2,-2)$．

解　略．

2．指出下列各点位置的特殊性：

$A(2,0,0)$；$B(0,-3,0)$；$C(0,0,-3)$；$D(-5,0,3)$；$E(3,2,0)$；$F(0,1,1)$．

解　点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，点 C 在 z 轴上，点 D 在 zox 平面上，点 E 在 xoy 平面上，点 F 在 yoz 平面上．

3．在平面直角坐标系和空间直角坐标系中，一切 $x=a$（a 为常数）的点构成的图形分别是什么？

解　平面直角坐标系中一切 $x=a$（a 为常数）的点构成与 y 平行或重合的直线，而在空间直角坐标系中一切 $x=a$（a 为常数）的点构成与 yoz 平面平行或重合的平面．

4．求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离．

解　设 $P(4,0,0)$、$Q(0,-3,0)$、$R(0,0,5)$ 分别是过点 M 且垂直于三个坐标轴的平面与三个坐标轴的交点，则点 M 到 x 轴、y 轴、z 轴的距离分别为 $|MP|$、$|MQ|$ 和 $|MR|$．由公式（7-1），有

$$|MP|=\sqrt{(4-4)^2+[0-(-3)]^2+(0-5)^2}=\sqrt{34},$$

$$|MQ|=\sqrt{(0-4)^2+[-3-(-3)]^2+(0-5)^2}=\sqrt{41},$$

$$|MR|=\sqrt{(0-4)^2+[0-(-3)]^2+(5-5)^2}=5.$$

5．在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 C．

解　设 $C(0,0,z)$，则根据公式（7-1），有

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

整理后得，$z=\dfrac{14}{9}$．故所求点 C 的坐标为 $C\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$．

6．在 yoz 坐标面上，求与三个点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 、 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点的坐标.

解　设 yoz 坐标面所求点为 $M(0, y, z)$，依题意有 $|MA|=|MB|=|MC|$，从而

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$

联立解得 $y=1$， $z=-2$，故所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

7．求证以 $M_1(4,3,1)$ 、 $M_2(7,1,2)$ 、 $M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$，

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_1M_3|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

即 $|M_1M_3|=|M_2M_3|$，因此结论成立.

习题 7.2

1．在平行四边形 $ABCD$ 内，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$， M 是该平行四边形对角线的交点．试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、 $\overrightarrow{MC}$ 、 $\overrightarrow{MD}$.

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$， 即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$， 于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MB}$， 于是 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$； $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

2．求起点为 $A(1,2,1)$，终点为 $B(-19,-18,1)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式.

解　$\overrightarrow{AB}=(-19-1)\boldsymbol{i}+(-18-2)\boldsymbol{j}+(1-1)\boldsymbol{k}=-20\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}=(-20, -20, 0)$，

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(-20, -20, 0)=(10, 10, 0).$$

3．求常数 λ 使向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda, 1, 5)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(2, 10, 50)$ 平行.

解　由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1}{10}=\dfrac{5}{50}$ 得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

4．求点 $M(1,\sqrt{2},1)$ 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 与坐标轴之间的夹角.

解　设 $\overrightarrow{OM}=(1,\sqrt{2},1)$ 与 x 、 y 、 z 轴之间的夹角为 α 、 β 、 γ，则

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

5．已知向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$ ，试求：

（1）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$；　　　　（2）$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解　（1）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}+2(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k})=12i+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$；

（2）$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})-2(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k})=12\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+48\boldsymbol{k}$.

6．已知两点 $A(2,\ \sqrt{2},\ 5)$ 和 $B(3,\ 0,\ 4)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角．

解　因为 $\overrightarrow{AB}=(1,\ -\sqrt{2},\ -1)$，所以

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2,\ \cos\alpha=\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=-\frac{1}{2},$$

从而 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$，$\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

7．求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影和在 y 轴上的投影分向量．其中 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

解　$\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，故向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影 $a_x=5$，在 y 轴上的投影分向量为 $\boldsymbol{a}_y=11\boldsymbol{j}$.

8．一向量的终点为点 $B(-2,\ 1,\ -4)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 3、-3 和 8，求该向量始点 A 的坐标．

解　设点 A 的坐标为 (x,y,z)，依题意有：

$$-2-x=3，1-y=-3，-4-z=8，$$

故 $x=-5$，$y=4$，$z=-12$，即所求的点 $A(-5,\ 4,\ -12)$.

9．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，$\cos\beta=\frac{3}{7}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的方向角是钝角．求 $\cos\gamma$.

解　因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 $\cos^2\gamma=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2-\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{36}{49}$，又 γ 是钝角，故 $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$.

习题 7.3

1．已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦．

解　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+1\times2+2\times1=6$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-3,\ 3,\ 0)$，

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2．证明下列结论：

（1）向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0,\ 1)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(-1,\ 1,1)$ 垂直；

（2）向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

证（1）因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+0\times1+1\times1=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（2）因为
$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{c}\\ =&[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}]\\ =&(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=0,\end{aligned}$$

所以 $[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\perp\boldsymbol{c}$.

3．求与向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

解　$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，故所求单位向量为

$$\boldsymbol{c}^0=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right).$$

4．已知向量 $\boldsymbol{a}\neq0$，$\boldsymbol{b}\neq0$．证明：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

证
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2[1-\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})]\\ &=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\ &=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

5．已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算下列各式：

（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　　（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

（3）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；　　（4）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

解（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-8(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$.

（2）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，故

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

（3）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})=(-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})=2$.

（4）由（3）知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -8 & -5 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}.$$

习题 7.4

1．写出过点 $M_0(1,2,3)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$ 为法向量的平面方程.

解　由题意可写出平面的点法式方程为

$$2(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0 \text{ 即 } 2x+2y+z-9=0.$$

2．求过点 $(0,0,1)$ 且与平面 $3x+4y+2z=1$ 平行的平面方程.

解　依题意，可取所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,4,2)$，从而其方程为

$$3(x-0)+4(y-0)+2(z-1)=0 \text{ 即 } 3x+4y+2z=2.$$

3. 求过点 $(1,1,1)$，且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解　$\boldsymbol{n}_1=(1,\ -1,\ 1)$，$\boldsymbol{n}_2=(3,\ 2,\ -12)$ 分别为两个已知平面的法向量，则可取所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(10,15,5)$，故所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0 \text{ 即 } 2x+3y+z-6=0.$$

4．设平面过原点及点 $(1,\ 1,\ 1)$，且与平面 $x-y+z=8$ 垂直，求此平面方程.

解　因为平面过原点，故可设其方程为 $Ax+By+Cz=0$，再由平面过点 $(1,1,1)$ 知 $A+B+C=0$．因为平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp(1,-1,\ 1)$，所以还应满足 $A-B+C=0$，从而 $A=-C$，$B=0$．故所求平面方程为 $x-z=0$.

5．求平面 $x+y-11=0$ 与 $3x+8=0$ 的夹角.

解　设 $x+y-11=0$ 与 $3x+8=0$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

6．求点 $(2,\ 1,\ 1)$ 到平面 $2x+2y-z+4=0$ 的距离.

解　利用点到平面的距离公式可得 $d=\dfrac{|2\times2+2\times1-1\times1+4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{9}{3}=3$.

习题 7.5

1．求通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的

直线．

解　取直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,1,-1)\times(1,-1,0)=(-1,-1,-2)$，于是所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}.$$

2．求直线 $\begin{cases}x+y+z=-1\\2x-y+3z=-4\end{cases}$ 的点向式方程与参数方程．

解　在直线上取一固定点 (x_0,y_0,z_0)，比如取 $x_0=1$，则有方程组

$$\begin{cases}y_0+z_0+2=0\\y_0-3z_0-6=0\end{cases},$$

解得 $z_0=-2$、$y_0=0$．所求点的坐标为 $M(1,0,-2)$，取直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=(1,1,1)\times(2,-1,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

所以直线的点向式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$．令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$，则所求参数方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\y=-t\\z=-2-3t\end{cases}$．

3．确定 l、m 的值，使：

（1）直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $lx+3y-5z+1=0$ 平行；

（2）直线 $\begin{cases}x=2t+2\\y=-4t-5\\z=3t-1\end{cases}$ 与平面 $lx+my+6z-7=0$ 垂直．

解　（1）欲使所给直线与平面平行，则须 $4l+3\times3-5\times1=0$，即 $l=-1$．

（2）欲使所给直线与平面垂直，则须 $\dfrac{l}{2}=\dfrac{m}{-4}=\dfrac{6}{3}$，所以 $l=4$、$m=-8$．

4．求通过直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z+1}{-1}$ 且与直线 $\begin{cases}2x-y-z-3=0\\x+2y-z-5=0\end{cases}$ 平行的平面．

解　显然点 $(2,-3,-1)$ 在所求的平面上，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与两条已知直线的方向向量都垂直，而直线 $\begin{cases}2x-y-z-3=0\\x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的方向向量为 $(2,-1,-1)\times(1,2,-1)$

$=(3,1,5)$，故 $\boldsymbol{n}=(1,-5,-1)\times(3,1,5)=(-24,-8,16)$，从而可得平面的点法式方程为 $-24(x-2)-8(y+3)+16(z+1)=0$，整理得

$$3x+y-2z+5=0.$$

5．求点 $M(4,1,2)$ 在平面 $x+y+z=1$ 上的投影．

解　过已知点 $M(4,1,2)$ 作所给平面的垂线，垂线的方向向量就是已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，所以垂线方程为 $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$，垂线与所给平面的交点即为所求投影．为了求投影，将垂线方程化为参数方程 $\begin{cases}x=t+4\\y=t+1\\z=t+2\end{cases}$，代入已知平面方程求得 $t=-2$，再代入上面的参数方程得所求投影为 $(2,-1,0)$．

6．设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，试证点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|},$$

并由此求点 $M_0(2,3,-1)$ 到直线 L：$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$ 的距离．

证　在 L 上取一点 N，使得 $\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{s}$．以 MM_0 和 MN 为邻边作平行四边形 MM_0PN．若以 MN 为底边，则该平行四边形的面积为 $d\cdot|\boldsymbol{s}|$；另一方面，根据向量积的几何意义，上述面积又为 $|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$，从而有 $d\cdot|\boldsymbol{s}|=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$，即

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

显然 $M(11,0,-25)$ 是已知直线上的一点，而直线的方向向量可取为

$$(2,-2,1)\times(3,-2,2)=(2,1,-2),$$

故由上面的公式，点 $M_0(2,3,-1)$ 到直线 L：$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$ 的距离为

$$d=\frac{|(11-2,0-3,-25+1)\times(2,1,-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3&-24\\1&-2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-24&9\\-2&2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}9&-3\\2&1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2025}}{3}=\frac{45}{3}=15.$$

7．求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程．

解　应用平面束的方法．投影直线一定在过已知直线且与已知平面垂直的平面内．设过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+\lambda-1=0.$$

该平面与已知平面$x+y+z=0$垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

解得$\lambda=-1$，得投影平面方程$y-z-1=0$，所以投影直线为$\begin{cases}y-z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}$.

习题 7.6

1．求圆心在原点，且经过点$(6,-2,3)$的球面方程．

解　由已知，半径$R=\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}=7$，所以球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=49.$$

2．将zox坐标面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$分别绕$x$轴和$z$轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程．

解　绕x轴旋转得$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，绕$z$轴旋转得$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3．指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形？

（1）$y=x+1$；　　（2）$x^2+y^2=4$；

（3）$x^2-y^2=1$；　　（4）$x^2=2y$.

解　（1）$y=x+1$在平面解析几何中表示直线，在空间解析几何中表示平面；

（2）$x^2+y^2=4$在平面解析几何中表示圆周，在空间解析几何中表示圆柱面；

（3）$x^2-y^2=1$在平面解析几何中表示双曲线，在空间解析几何中表示双曲柱面；

（4）$x^2=2y$在平面解析几何中表示抛物线，在空间解析几何中表示抛物柱面．

4．说明下列旋转曲面是怎样形成的？

（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　　（2）$x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

（3）$x^2-y^2-z^2=1$；　　（4）$(z-a)^2=x^2+y^2$.

解　（1）xoy平面上的椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$绕$x$轴旋转而成；或者$xoz$平面上椭

圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成.

（2） xoy 平面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转而成；或者 yoz 平面上的双曲线 $z^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转而成.

（3）xoy 平面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成；或者 xoz 平面上的双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转而成；

（4） yoz 平面上的直线 $z=y+a$ 绕 z 轴旋转而成；或者 xoz 平面上的直线 $z=x+a$ 绕 z 轴旋转而成.

习题 7.7

1．分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

解　在已知曲线方程中消去 x 坐标得 $3y^2-z^2=16$，即为所求的母线平行于 x 轴的柱面；消去 y 坐标得 $3x^2+2z^2=16$，即为所求的母线平行于 y 轴的柱面.

2．求在 yoz 平面内以坐标原点为圆心的单位圆的方程（任写出三种不同形式的方程）.

解　该单位圆可以是柱面 $y^2+z^2=1$ 与平面 $x=0$ 的交线，即所求方程为 $\begin{cases}y^2+z^2=1\\x=0\end{cases}$；也可以看成是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x=0$ 的交线，即所求方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x=0.\end{cases}$；还可以看成柱面 $y^2+z^2=1$ 与单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，即所求方程为 $\begin{cases}y^2+z^2=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$.

3．将下面曲线的一般方程化为参数方程：

（1） $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\y=x\end{cases}$；　　（2） $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)=4\\z=0\end{cases}$.

解　（1）原曲线方程可变为 $\begin{cases}y=x\\\frac{2x^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1\end{cases}$．根据椭圆的参数方程的写法，可得原曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z = 3\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

（2）原曲线方程可变为$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$，根据一般圆的参数方程的写法，可得原曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

4．指出下列方程所表示的曲线：

（1）$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 30 \\ z = 1 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases}$；　　（4）$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$．

解　（1）这是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 与平面 $x = 3$ 的交线，将 $x = 3$ 代入第一个方程得 $y^2 + z^2 = 16$．故方程所表示的曲线为平面 $x = 3$ 上的一个圆周，其圆心在点 $(3,0,0)$，半径为 4．

（2）这是椭球面 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 30$ 与平面 $z = 1$ 的交线，将 $z = 1$ 代入第一个方程得 $x^2 + 4y^2 = 21$．故方程所表示的曲线为平面 $z = 1$ 上的一个椭圆周，其中心在点 $(0,0,1)$，长半轴为 $\sqrt{21}$，短半轴为 $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$．

（3）这是单叶旋转双曲面 $x^2 - 4y^2 + z^2 = 25$ 与平面 $x = -3$ 的交线，将 $x = -3$ 代入第一个方程得 $-4y^2 + z^2 = 16$．故方程所表示的曲线为平面 $x = -3$ 上的一条双曲线，其中心在点 $(-3,0,0)$，实半轴为 4，虚半轴为 2．

（4）这是旋转抛物面 $y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0$ 与平面 $y = 4$ 的交线，将 $y = 4$ 代入第一个方程得 $z^2 - 4x = -24$，即 $x - 6 = \dfrac{z^2}{4}$，故方程所表示的曲线为平面 $y = 4$ 上的一条抛物线，其顶点为 $(6,4,0)$，对称轴平行于 x 轴．

5．求抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程．

解　交线方程为$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$.

（1）消去 z 得曲线关于 xoy 坐标面的投影柱面 $x^2+5y^2+4xy-x=0$，从而该曲线在 xoy 坐标面上的投影为$\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$.

（2）消去 y 得曲线关于 zox 坐标面的投影柱面 $x^2+5z^2-2xz-4x=0$，从而该曲线在 zox 坐标面上的投影为$\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

（3）消去 x 得曲线关于 yoz 坐标面的投影柱面 $y^2+z^2+2y-z=0$，从而该曲线在 yoz 坐标面上的投影为$\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

总习题七

1．判断正误：

（1）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；（　　）

（2）若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；（　　）

（3）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；（　　）

（4）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$．（　　）

解　（1）错．因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$ 时，不能判定 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$．例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$．

（2）错．例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}\times[-(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})]=\boldsymbol{k}$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$．

（3）错．因为两个相互垂直的非零向量的点积也为零．

（4）对．这是叉积运算规律中的反交换律．

2．填空题：

（1）若 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________；

（2）与平面 $x-y+2z-6=0$ 垂直的单位向量为________；

（3）过点 $(-3,1,-2)$ 和 $(3,0,5)$ 且平行于 x 轴的平面方程为________；

（4）过原点且垂直于平面 $2y-z+2=0$ 的直线为________；

（5）曲线$\begin{cases} z=2x^2+y^2 \\ z=1 \end{cases}$在 xoy 平面上的投影曲线方程为________．

解　（1）$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}=0$.

（2）平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$ ，故与平面垂直的单位向量为

$$\boldsymbol{n}^0=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2) .$$

（3）已知平面平行于 x 轴，则平面方程可设为 $By+Cz+D=0$ ，将点 $(-3,1,-2)$ 和 $(3,0,5)$ 代入方程，有 $\begin{cases}B-2C+D=0\\5C+D=0\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}B=-\frac{7}{5}D\\C=-\frac{1}{5}D\end{cases}$. 从而有 $-\frac{7}{5}Dy-\frac{1}{5}Dz+D=0$ ，整理得平面方程为 $7y+z-5=0$.

（4）因为直线与平面垂直，所以直线与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,2,-1)$ 平行，取直线方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=(0,\ 2,\ -1)$ ，由于直线过原点，故所求直线方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=-z$.

（5）将 $z=1$ 代入第一个方程得投影柱面 $2x^2+y^2=1$ ，故 $\begin{cases}2x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$ 为空间曲线 $\begin{cases}z=2x^2+y^2\\z=1\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影曲线方程.

3．选择题：

（1）若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ ，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 应满足条件（　　）；

A． $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B． $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ （ λ 为常数）

C． $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$　　D． $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

（2）下列平面方程中，过 y 轴的方程是（　　）；

A． $x+y+z=1$　　B． $x+y+z=0$

C． $x+z=0$　　D． $x+z=1$

（3）在空间直角坐标系中，方程 $z=1-x^2-2y^2$ 所表示的曲面是（　　）；

A．椭球面　　B．椭圆抛物面

C．椭圆柱面　　D．单叶双曲面

（4）空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2-2\\z=5\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影方程为（　　）；

A． $x^2+y^2=7$　　B． $\begin{cases}x^2+y^2=7\\z=5\end{cases}$

C． $\begin{cases}x^2+y^2=7\\z=0\end{cases}$　　D． $\begin{cases}z=x^2+y^2-2\\z=0\end{cases}$

（5）直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 与平面 $x-y+z=1$ 的位置关系是（　　）.

A．垂直　　　　　　　　　　B．平行

C．夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$　　　　　　　　D．夹角为 $-\dfrac{\pi}{4}$

解　（1）选 D．因为只有当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，才有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$．而选项 A 中 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 夹角不为 0，选项 B 和 C 中 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 方向可以相同，也可以相反．故只有选项 D 正确．

（2）选 C．平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 若过 y 轴，则 $B=D=0$．故选项 C 正确．

（3）选 B．对于曲面 $z=1-x^2-2y^2$，位于平面 $z=1$ 下方且垂直于 z 轴的平面截曲面是椭圆，垂直于 x 轴或 y 轴的平面截曲面是开口向下的抛物线，根据曲面的截痕法，可以判断曲面是椭圆抛物面．故选项 B 正确．

（4）选 C．将 $z=5$ 代入曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ z=5 \end{cases}$ 的第一个方程得其关于 xoy 平面的投影柱面 $x^2+y^2=7$，再与 $z=0$ 联立得该曲线在 xoy 面上的投影．故选项 C 正确．

（5）选 B．直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,-1)$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以有 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，直线与平面平行．故选项 B 正确．

4．已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$，计算

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

（2）$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

（3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$．

解（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,-2,1)\times(1,1,2)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-5,-1,3)$．

（2）因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-5,0)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$，所以

$$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1,-5,0)\cdot(2,-1,3)=7.$$

（3）因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-3,-1)$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\sqrt{9+1})^2=10$．

5．已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(2,-2,5)$，终点为 $P_2(-1,4,7)$，试求：（1）向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示；（2）向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；（3）向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；（4）与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向一致的单位向量．

解（1）$\overrightarrow{P_1P_2}=(-1-2,\ 4-(-2),\ 7-5)=(-3,6,2)$．

（2）$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}=\sqrt{49}=7$．

（3）$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦即它的单位向量，故 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 x 、y 、z 三个坐标轴上的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{3}{7}\text{，}\ \cos\beta = \frac{6}{7}\text{，}\ \cos\gamma = \frac{2}{7}.$$

（4）所求单位向量为 $(\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2})^0 = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}|} = -\dfrac{3}{7}\boldsymbol{i} + \dfrac{6}{7}\boldsymbol{j} + \dfrac{2}{7}\boldsymbol{k}$.

6．设向量 $\boldsymbol{a} = (1,-1,1)$，$\boldsymbol{b} = (1,1,-1)$，求与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量.

解 令 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,2,2)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量为

$$\pm\boldsymbol{c}^0 = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c} = \pm\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

7．向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a} = (2,3,-1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (1,-2,3)$，且与 $\boldsymbol{c} = (2,-1,1)$ 的数量积为 -6，求向量 $\boldsymbol{d}$.

解 $\boldsymbol{d}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{d}$ 平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，存在数 λ 使

$$\boldsymbol{d} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \lambda(2,3,-1)\times(1,-2,3) = (7\lambda,-7\lambda,-7\lambda)\text{，}$$

因为 $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c} = -6$，所以 $2\times7\lambda + (-1)\times(-7\lambda) + 1\times(-7\lambda) = -6$，解得 $\lambda = -\dfrac{3}{7}$，所以 $\boldsymbol{d} = (-3,3,3)$.

8．求满足下列条件的平面方程：

（1）过三点 $P_1(0,1,2)$、$P_2(1,2,1)$ 和 $P_3(3,0,4)$；

（2）过 x 轴且与平面 $\sqrt{5}x + 2y + z = 0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

解 $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,1,-1)$，$\overrightarrow{P_1P_3} = (3,\ -1,\ 2)$，由题设知，所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}\times\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

又因为平面过点 $P_1(0,\ 1,\ 2)$，所以所求平面方程为

$$(x-0) - 5(y-1) - 4(z-2) = 0\text{，}$$

整理得

$$x - 5y - 4z + 13 = 0.$$

（2）设所求平面的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$．因所求平面过 x 轴，故有 $A = 0$．又平面过原点，所以又有 $D = 0$，故所求平面方程变为 $By + Cz = 0$，由题设可知 $B \neq 0$（否则，所求平面方程为 $Cz = 0$，即 $z = 0$．这样它与已知平面 $\sqrt{5}x + 2y + z = 0$ 所夹锐角的余弦为 $\dfrac{\left|0\times\sqrt{5} + 0\times2 + 1\times1\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \neq \cos\dfrac{\pi}{3}$）.

令$\dfrac{C}{B}=C'$，则有$y+C'z=0$，由题设得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left|0\times\sqrt{5}+1\times 2+C'\times 1\right|}{\sqrt{0^2+1^2+C'^2}\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2+1^2}},$$

解得$C'=3$或$C'=-\dfrac{1}{3}$．于是，所求平面方程为$y+3z=0$或$3y-z=0$．

9．一平面过直线$\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$且与平面$x-4y-8z+12=0$垂直，求该平面方程．

解　设所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$．由于直线在所求平面上，故可令$x=0$，得$y=-\dfrac{4}{5}$、$z=4$，从而确定了所求平面上的一个点$\left(0,-\dfrac{4}{5},4\right)$．

又已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&5&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=(-5,2,-5),$$

从而有

$$(A,B,C)\cdot(-5,2,-5)=-5A+2B-5C=0, \qquad ①$$

因为所求平面与平面$x-4y-8z+12=0$垂直，则

$$(A,B,C)\cdot(1,-4,-8)=A-4B-8C=0. \qquad ②$$

①、②联立可解得$A=-2C$、$B=-\dfrac{5}{2}C$．故所求平面方程为

$$-2C(x-0)-\frac{5}{2}C\left(y+\frac{4}{5}\right)+C(z-4)=0,$$

整理得

$$4x+5y-2z+12=0.$$

10．求既与两平面Π_1：$x-4z=3$和Π_2：$2x-y-5z=1$的交线平行，又过点$(-3,2,5)$的直线方程．

解　令$\boldsymbol{n}_1=(1,0,-4)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,-1,-5)$，给出以下三种解法：

方法一：所求直线的方向向量可取为$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-4,-3,-1)$，从而根据点向式方程，所求直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

方法二：设$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，因为$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1$且$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_2$，所以有$m-4p=0$且$2m-n-5p=0$，解得$m=4p$、$n=3p$，从而$p\neq 0$．根据点向式方程，所求直线

方程为

$$\frac{x+3}{4p}=\frac{y-2}{3p}=\frac{z-5}{p}，即 \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

方法三：设平面 Π_3 过点 $(-3,2,5)$，且平行于平面 Π_1，则其法线向量 $\boldsymbol{n}_3=\boldsymbol{n}_1=(1,0,-4)$，从而 Π_3 的方程为 $1\cdot(x+3)+0\cdot(y-2)-4\cdot(z-5)=0$，即 $x-4z+23=0$．同理，过已知点 $(-3,2,5)$ 且平行于平面 Π_2 的平面 Π_4 的方程为 $2x-y-5z+33=0$．于是，所求直线的方程为 $\begin{cases}x-4z+23=0\\2x-y-5z+33=0\end{cases}$.

11．一直线通过点 $A(1,2,1)$，且垂直于直线 L：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，又和直线 $x=y=z$ 相交，求该直线方程.

解　设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，因为它垂直于 L，所以 $3m+2n+p=0$；又因为直线过点 $A(1,2,1)$，则所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z-1}{p}$.

令 $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z-1}{p}=\lambda$，则有 $\begin{cases}x=1+\lambda m\\y=2+\lambda n\\z=1+\lambda p\end{cases}$，代入 $x=y=z$ 得 $\begin{cases}1+\lambda m=2+\lambda n\\1+\lambda p=2+\lambda n\end{cases}$，从而 $m=p$；再代入 $3m+2n+p=0$ 可解得 $n=-2p$．因此所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

12．指出下列方程表示的图形名称：

（1）$x^2+4y^2+z^2=1$；

（2）$x^2+y^2=2z$；

（3）$z=\sqrt{x^2+y^2}$；

（4）$x^2-y^2=0$；

（5）$x^2-y^2=1$；

（6）$\begin{cases}z=x^2+y^2\\z=2\end{cases}$.

解　（1）xoy 坐标面上的椭圆 $x^2+4y^2=1$ 绕 y 轴旋转的旋转椭球面，或 yoz 坐标面上的椭圆 $4y^2+z^2=1$ 绕 y 轴旋转的旋转椭球面.

（2）xoz 坐标面上的抛物线 $x^2=2z$ 绕 z 轴旋转的旋转抛物面，或 yoz 坐标面上的抛物线 $y^2=2z$ 绕 z 轴旋转的旋转抛物面.

（3）xoz 坐标面上的直线 $z=x$（$x\geqslant 0$）绕 z 轴旋转的锥面，或 yoz 坐标面上的直线 $z=y$（$y\geqslant 0$）绕 z 轴旋转的锥面.

（4）母线平行于 z 轴的两垂直平面 $x-y=0$ 和 $x+y=0$.

（5）母线平行于 z 轴的双曲柱面.

（6）旋转抛物面被平行于 xoy 面的平面所截得到的圆心在 $(0,0,2)$ 处，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆.

13．求曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-(x^2+y^2)$ 所围立体在 xoy 平面上的投影.

解　将所给曲面方程联立消去 z ，就得到两曲面交线 C 的投影柱面的方程 $x^2+y^2=1$，该柱面与 xoy 平面的交线 $C':\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$ 所围成的区域 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\z=0\end{cases}$ 就是曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-(x^2+y^2)$ 所围立体在 xoy 平面上的投影.