



第 1 章

信号与系统的基本概念

本章的主要目的是学习课程涉及到的“信号”与“系统”的核心概念，以明确课程学习的对象，并方便后续章节的讨论。

首先给出信号的一些基本概念，然后讨论平移、旋转等信号的自由变换，接着讨论正弦信号、指数信号、冲激信号和阶跃信号等典型的信号，再讨论分析信号时经常使用的一些基本性质，例如周期性、奇偶性等，最后讨论系统的概念以及系统的基本性质。

1.1 信号的概念

信号 (Signal) 是消息的表现形式, 消息则是信号的具体内容。在信息论中, 信号是用数学函数表示的一种信息流。

信号可分为**确定性信号**和**随机信号**。所谓确定性信号 (Determinate Signal) 即指在自变量的一个取值下, 信号的取值是唯一确定的。确定性信号一般是用一个函数来表示的, 该函数的**独立变量** (Independent Variable) 或者说**自变量**可能是一个也可能是几个。所谓随机信号 (Random Signal) 是对一个随机过程的函数描述, 在自变量的一个取值下, 随机信号的取值不是唯一确定的, 而是符合一定的概率分布。本书第 12 章会对随机信号进行简单讨论, 其他章节中涉及到的信号都是确定性信号。

数学上, 信号表示为一个或者多个独立变量的函数, 变量可以是时间、空间, 但不仅限于时间和空间。如果信号仅包含一个自变量, 那么它就是一**维信号** (One Dimension Signal), 可以用一元函数表示, 如语音信号、电压信号 $v(t)$ 和电流信号 $i(t)$ 等。如果信号包含两个自变量, 就是**二维信号** (Two Dimensions Signal), 可以用二元函数表示, 如图像的灰度值作为平面坐标 (i, j) 的函数可以视为二维信号。依此类推, 视频信号是**三维信号**, 视频信号是平面坐标 (i, j) 和时间 t 的函数, 可以用三元函数表示。

如无特别声明, 本课程中的信号都是一维信号。一维信号的自变量决不仅限于时间, 但为了简化讨论, 课程中函数的自变量都可以理解为时间变量。

进一步地, 时间信号还可以分为**连续时间信号**和**离散时间信号**。如果信号自变量的定义域是**实数域** R , 那么所表示的信号就称为**连续时间信号** (Continuous-Time Signal), 或者称为**模拟信号** (Analog Signal 或 Simulated Signal), 记为 $x(t)$, $t \in R$, 这就意味着, 作为自变量的时间 t 是从负无穷大到正无穷大变化的实数。我们将信号以时间 t 为横轴, 数值 $x(t)$ 为纵轴作出的图形称为信号的**波形** (Wave Profile)。图 1-1 展示的就是连续时间信号 $x(t)$ 的波形。

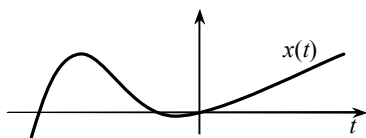


图 1-1 连续时间信号的波形

自然界的信号大都为连续时间信号, 例如声音信号、视觉信号、温度信号等。

如果用来表示信号的函数, 其自变量的定义域是**整数域** Z , 那么所表示的信号称为**离散时间信号** (Discrete-Time Signal), 或者称为**序列** (Sequence), 记为 $x[n]$, $n \in Z$, 这就意味着, 作为自变量的时间 n 是从负无穷大到正无穷大变化的整数。图 1-2 所示是一个离散时间信号的波形。

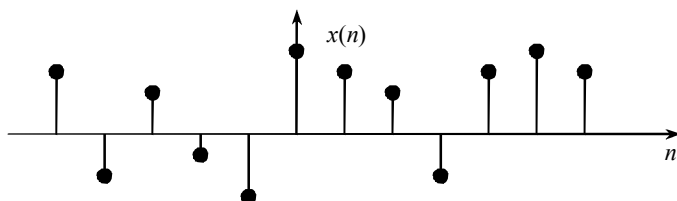


图 1-2 离散时间信号的波形

因为离散时间信号的自变量的定义域是整数域,因此在非整数点上,信号的值 $x[n]$ 是无定义的,例如在图 1-2 中, $x[3/2]$ 无定义。注意, 不能将无定义理解为 0。如果没有特殊说明, 在本书中, $x(t)$ 和 $x[n]$ 的值域为复数域 C 。

要特别注意的是, 这里的“连续”只是“离散”的反义词, 与数学分析里面“连续函数”的概念不一样。

许多情况下离散时间信号是由连续时间信号等间隔取样得来的, 例如数字电路中 A/D 转换器的输出就是离散时间信号。但是现实生活中, 有些信号本身就是离散信号, 例如某支股票的价格、某国的 GDP 等。并且, 离散时间信号也并不总是要求在实际时间上等间隔。由于星期六、星期天、节假日休息, 股票价格在时间上就不是等间隔的。

离散信号适合于数字化处理。但严格地说, 离散时间信号与我们常说的数字信号是有区别的。这里所定义的离散时间信号的定义域是离散的, 但是它的值域却可以是复数域 C , 是可以连续变化的, 只有将离散时间信号的值域进一步量化, 并且按照某种方式进行编码, 才会得到大家熟悉的数字信号。量化所造成的误差, 在有些文献中, 被作为量化噪声来处理。严格地讲, 最基础的数字信号是指值域为 $\{0,1\}$ 的离散时间信号, 最底层的数字硬件记录和处理的就是一种数字信号。例如, CD 光盘利用凹凸的反射性质来保存数字信号。在图 1-3 中, (a) 是数字信号, (b) 是离散时间信号, (c) 是连续时间信号。

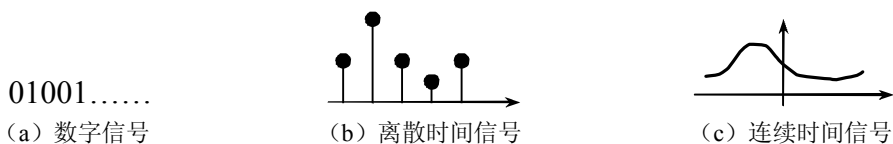


图 1-3 不同形式的信号

在数学上, 我们知道任意的两个实数之间都存在无穷多个实数。严格地讲, 并不是所有的实数都可以被数字系统处理或者存储, 例如无理数就不行。这是由于数字系统或者数字计算机的字长是有限的。因此从严格的数学意义上来讲, 本书所定义的离散时间信号是无法在数字系统里面实现的。然而, 在工程上, 我们并不要求计算是完全精确的, 而是有一个可容忍的误差范围, 所以只要量化级数足够高, 量化带来的误差总是可以容忍的, 在对信号和系统进行定量和定性分析时是可以被忽略的, 所以在用计算机来处理信号时, 我们可能意识不到会有误差的存在。总之, 工程上的信号处理是理论上的信号处理的一个逼近, 是一个将自然信号首先在定义域上离散化, 然后在值域上离散化再进行处理的过程。

信号的能量和功率: 电信号的功率和能量的概念是十分明确的, 在电路分析课程中我们知道, 当电阻上的电流和电压分别为 $i(t)$ 和 $u(t)$ 时, 其消耗的功率为:

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t) \quad (1-1)$$

它在时间 $[t_1, t_2]$ 内消耗的能量为:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}u^2(t)dt \quad (1-2)$$

它在时间 $[t_1, t_2]$ 内的平均功率为:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}u^2(t)dt \quad (1-3)$$

借用电信号的功率和能量的概念, 对于一般信号, 我们也可以引入能量和功率的概念, 这种概

念已经超出了物理上的能量和功率概念的范畴。

一个连续时间信号 $x(t)$ 在时间 $[t_1, t_2]$ 内的能量 (Energy) 定义为:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

其中, $|\cdot|$ 是复数的模。可以将 E 理解为电压信号或者电流信号 $x(t)$ 在 1 欧姆的电阻上消耗的能量。一个离散时间信号 $x[n]$ 在区间 $[n_1, n_2]$ 内的能量定义为:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (1-5)$$

一个连续时间信号 $x(t)$ 在时间 $[t_1, t_2]$ 内的平均功率 (Average Power) 定义为:

$$E = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1-6)$$

一个离散时间信号 $x[n]$ 在区间 $[n_1, n_2]$ 内的平均功率定义为:

$$E = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (1-7)$$

一个连续时间信号 $x(t)$ 的总能量定义为:

$$E_{\infty} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1-8)$$

一个离散时间信号 $x[n]$ 的总能量定义为:

$$E_{\infty} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (1-9)$$

一个连续时间信号 $x(t)$ 的总平均功率定义为:

$$P_{\infty} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1-10)$$

一个离散时间信号 $x[n]$ 的总平均功率定义为:

$$P_{\infty} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (1-11)$$

能量与功率是信号的两个重要的综合性描述参数, 在信息处理和分析中有着广泛的应用。在很多场合, 功率和能量概念的引入能够帮助我们更好地理解信号的物理意义, 或者为信号分析和处理的方法提供启示。例如控制中的一些最优控制算法 (线性二次型) 是按能量最小的方式来设计的。按照功率和能量取值情况的不同, 常见信号又可以分为:

(1) **能量有限信号**: 能量有限信号的平均功率只能是 0, 如图 1-4 所示的单个方波脉冲就是典型的能量有限信号。

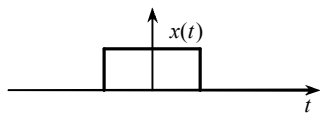


图 1-4 单个方波信号

(2) **功率有限信号**: 功率有限信号的总能量可能是无限的, 如图 1-5 所示的正弦信号就是典型的能量无限、功率有限信号; 功率有限信号的能量也可能是有限的, 如图 1-4 所示的信号就是能量有限、功率有限信号, 只不过功率为 0。能量有限信号总是功率有限的。

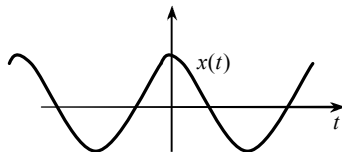


图 1-5 正弦信号

(3) **功率无限信号**: 功率无限信号的总能量也是无限的, 如图 1-6 所示的信号 $x(t) = t$ 就是典型的功率无限信号, 其能量也是无限的。

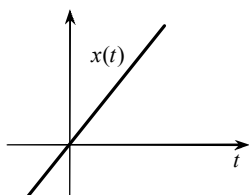


图 1-6 信号 $x(t) = t$

1.2 信号的三种主要变换

信号自变量的变换是信号分析与综合的常用手段, 是信号处理的基本技能。用数学语言来讲, 信号自变量的变换就是函数自变量的变换。这部分内容在数学课程里面已经描述过了, 它虽然简单, 但也是最容易出错的地方, 需要读者细心体会。

1.2.1 时间反转

信号 $x(-t)$ 称为信号 $x(t)$ 的**时间反转**, 或者简称**反转 (Reflection)**。当然, 反过来, 信号 $x(t)$ 也可以称为信号 $x(-t)$ 的时间反转。下面通过图 1-7 来图示时间反转, (a) 为原信号 $x(t)$, (b) 为其反转信号 $x(-t)$ 。



图 1-7 信号的时间反转

信号的波形和它的反转波形彼此关于 y 轴对称。形象地说, 将信号沿着 y 轴“折过来”, 就成为其反转。电影里面“武林高手”一跃上房或者上树的效果, 就是利用胶片倒放来实现的, 这是时间反转的典型实例。同理, 离散时间信号 $x[n]$ 的反转 $x[-n]$ 也是类似的。

1.2.2 时间的尺度变换

信号 $x(at)$ 是对信号 $x(t)$ 进行**时间尺度变换 (Time Scaling)** 的结果, 其中 a 为实常数。

图 1-8 (b) 和 (c) 分别给出了 $a = 2$ 和 $a = 1/2$ 时时间尺度变换的波形变化示意图, 从中可以看出, 相对于 $x(t)$ 而言, $x(2t)$ 的波形变“窄”了, $x(t/2)$ 的波形变“宽”了。

为了更好地理解和掌握尺度变换, 我们可以引入波形特征点, 例如, 我们可以设信号 $x(t)$ 在 1 秒和 2 秒处的波形幅值分别为特征点 A 和 B。显然, 特征点 A 和 B 在信号 $x(2t)$ 的波形中分别处于 0.5 秒和 1 秒处, 特征点 A 和 B 在信号 $x(t/2)$ 的波形中分别处于 2 秒和 4 秒处。

作为时间尺度变换的实际例子, 我们不妨考察一下录音机, 有些录音机为了延长磁带的使用时间, 增加了变速功能。如果将录放速度降低一半的话, 60 分钟的磁带可以用 120 分钟, 这样做虽

然降低了一些音质,但是对于一些对音质要求不高的场合还是十分有用的。下面对录音机的变速功能做一个分析。

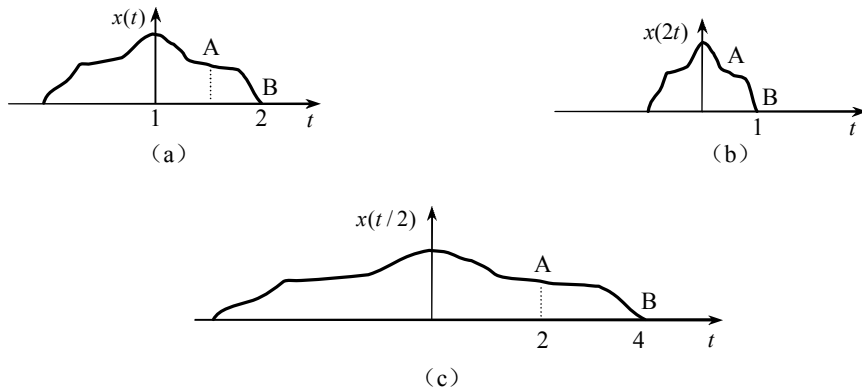


图 1-8 信号的尺度变换

(1) 如果慢速录音,再正常速度放音,例如录音的信号是 $x(t)$,放音时信号变成了 $x(2t)$,这时可以发现,浑厚的男声似乎变成了尖细的女声,其原因在于信号的高频成分被加强了。以单频正弦信号为例,如果 $x(t) = \sin(\omega t)$,则 $x(2t) = \sin(2\omega t)$,可见频率增加了一倍,频率成分向高频段移动。

(2) 如果正常速度录音,再慢速放音,例如录音的信号是 $x(t)$,放音时信号变成了 $x(t/2)$,这时可以发现,尖细的女声似乎变成了浑厚的男声,其原因在于信号的各项频率分量都被减半,低频成分更加丰富了。

在第 4 章学习傅里叶变换的时空尺度性质的时候,大家会对尺度变换有更加深刻的理解。

1.2.3 时间移位

信号 $x(t-t_0)$ 或者 $x(t+t_0)$ 称为信号 $x(t)$ 的时间移位 (Time Shift)。如果 $t_0 > 0$,则在波形上 $x(t-t_0)$ 是原信号 $x(t)$ 向右移动形成的,而 $x(t+t_0)$ 是原信号 $x(t)$ 向左移动形成的。图 1-9 给出了信号的时间移位的情况。为了更好地理解时间移位,我们可以引入波形特征点,例如我们可以认为信号 $x(t)$ 的峰值点为特征点。如果 $x(t)$ 的峰值点在 t_m ,那么 $x(t+t_0)$ 的峰值点在 t_m-t_0 处, $x(t-t_0)$ 的峰值点在 t_m+t_0 处。

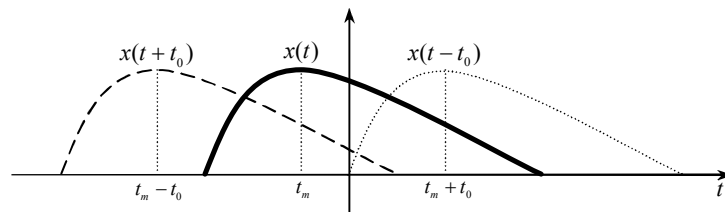


图 1-9 信号的时间移位

在实际信号变换中,通常会综合运用上述多种基本变换。在这种情况下,通过波形特征点(如峰值点、过零点等)的变化情况,可以帮助我们正确地理解自变量的变换。

例题 1.1 已知 $x(t)$ 的波形如图 1-10 (a) 所示,求信号 $x(t+1)$ 、 $x(1-t)$ 和 $x(at+1)$ 的波形,其中 $a > 0$ 。

解: 在图 1-10 中, (a) 是原信号 $x(t)$ 的波形; (b) 是 $x(t)$ 向左移动 1 个单位形成的 $x(t+1)$; (c) 是 $x(1-t)$ 的波形, 是时间反转和时间移位的组合, 原波形 $x(t)$ 先向左移动 1 个时间单位, 再反转, 形成 $x(1-t)$, 事实上, 先反转, 再向右移动 1 个时间单位也可以得到相同的结果; (d) 是 $x(at)$ 的波形, 是 $x(t)$ 的时间尺度变换; (e) 是 $x(at+1)$ 的波形, 原波形 $x(t)$ 先进行 a 的尺度变换, 再向左移动 $1/a$ 个时间单位, 形成 $x(at+1)$, 事实上, 先向左移动 1 个时间单位, 再进行 a 的尺度变换也会得到相同的结果。

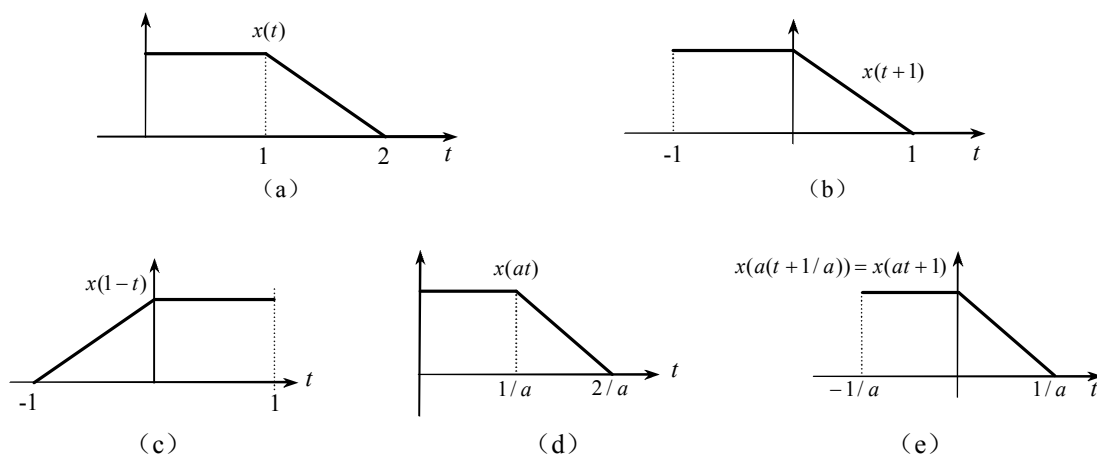


图 1-10 自变量变换举例

1.3 信号的周期性和奇偶性

本节讨论信号的周期性和奇偶性, 这两种性质都是信号的基本属性。

1.3.1 周期信号

在实际中, 周期信号是非常普遍的。许多周而复始的物理振荡就会产生周期信号, 电子系统里面的正弦信号也是周期信号的例子。

下面来讨论周期性的概念。如果存在有界实常数 T , 使得

$$\forall t: x(t) = x(t+T) \quad (1-12)$$

则称 $x(t)$ 为周期信号 (Periodic Signal), T 称为周期信号 $x(t)$ 的周期 (Period)。

显然, 如果式 (1-12) 成立, 反复使用周期性, $x(t+T) = x(t+T+T) = x(t+2T)$, 可以得到:

$$x(t) = x(t+mT) \quad m \in Z \quad (1-13)$$

也就是说, 如果 T 是 $x(t)$ 的周期, 则 mT 也是 $x(t)$ 的周期。因此有必要定义最小正周期, 这个最小正周期也称为周期信号 $x(t)$ 的基波周期 (Fundamental Period)。

对于离散时间信号 $x[n]$, 如果存在有界整数 N , 使得

$$\forall n: x[n] = x[n+N] \quad (1-14)$$

则称 $x[n]$ 为周期序列, N 就是周期信号 $x[n]$ 的周期。与连续时间信号的情况类似, 如果式 (1-14) 成立, 则有:

$$x[n] = x[n+mN] \quad m \in Z \quad (1-15)$$

也就是说，如果 N 是 $x[n]$ 的周期，则 mN 也是 $x[n]$ 的周期。因此同样需要定义最小正周期，这个最小正周期也称为周期信号 $x[n]$ 的基波周期。没有有界周期的信号就是非周期信号（Aperiodic Signal 或 Nonperiodic Signal）。

注意：本书定义的周期信号是数学意义上的，它在时间上的持续期是从负无穷大到正无穷大，这与工程上的周期信号有一定的区别。工程上的周期信号总是从某个时间（如电源闭合）开始到某个时间（如电源断开）结束的。电源闭合后，电子系统一般都会有一个暂态过程，这个暂态过程的分析不是本书的讨论范围，当系统进入稳态以后，可以认为工程上的周期信号和数学上的周期信号是一致的。当然，我们也可以用周期信号与方波信号相乘的方式来表示工程上的周期信号，方波信号可以看作是在时间轴上的一个窗口，这个窗口对应着我们要考察的时间段。

1.3.2 奇信号与偶信号

奇信号和偶信号的概念与奇函数和偶函数的概念是一致的。如果 $x(t) = x(-t)$ ，则称信号 $x(t)$ 为偶信号（Even Signal）；如果 $x(t) = -x(-t)$ ，则称信号 $x(t)$ 为奇信号（Odd Signal）。图 1-11（a）所示是一个典型的偶信号：余弦信号；图 1-11（b）所示是一个典型的奇信号：正弦信号。表现在波形上，偶信号的波形关于 y 轴对称，奇信号的波形关于原点中心对称。一个有用的结论是：任何信号都可以分解为它的奇部和偶部之和：

$$x(t) = Ev\{x(t)\} + Od\{x(t)\} \quad (1-16)$$

其中：

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1-17)$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1-18)$$

显然 $Ev\{x(t)\}$ 是偶信号， $Od\{x(t)\}$ 是奇信号，它们分别被称为信号 $x(t)$ 的偶部和奇部。在很多信号分析的场合，奇信号和偶信号有其独特的作用，因此将信号分解成为奇部和偶部之和是一种分析技巧。



图 1-11 典型的偶信号（余弦信号）和典型的奇信号（正弦信号）

1.4 几种典型信号

本节将介绍一些常用的基本信号形式，并对其最重要的性质进行简单讨论。在分析复杂信号时，往往将复杂信号分解成这些基本信号的某种组合，最终复杂信号的性质将由这些基本信号的性质决定。本课程主要内容的讨论就是遵循着这样的思路展开的。

1.4.1 连续时间复指数信号

形如 $x(t) = ce^{at}$ 的信号称为复指数信号 (Complex Exponential Signal), 其中 c 和 a 都是复数。当 c 和 a 都退化为实数时, 又称 $x(t)$ 为实指数信号 (Real Exponential Signal)。

下面讨论复指数信号的几种情况 (不妨取 $c=1$):

(1) a 为实数, 且 $a > 0$ 。

这是信号指数增长的情况, 随着时间的增长, 信号的值在增加, 时间增加到无穷大, 信号的值也增加到无穷大。图 1-12 所示就是这种指数增长信号。

(2) a 为实数, 且 $a < 0$ 。

这是信号指数衰减的情况, 随着时间的增长, 信号的值在下降, 时间增加到无穷大, 信号的值衰减到 0。图 1-13 所示就是这种指数衰减信号。

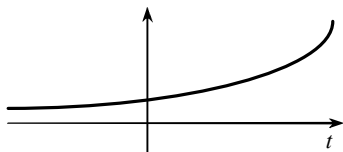


图 1-12 指数增长信号

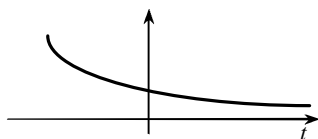


图 1-13 指数衰减信号

(3) $a = j\omega_0$, 即为纯虚数。

由欧拉公式 (Euler's Formula) 可知, 可以将复指数的极坐标形式变换为直角坐标形式:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \quad (1-19)$$

下面再来分析一下信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的周期性, 首先注意一个基本事实:

$$\forall k \in Z: e^{j2\pi k} = 1 \quad (1-20)$$

如果 T 是信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的周期, 那么有 $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 T} \cdot e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t}$, 则有 $e^{j\omega_0 T} = 1$, 即:

$$\omega_0 T = 2\pi k \quad T = 2\pi k / \omega_0 \quad k \in Z \quad (1-21)$$

可见, 连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 是周期信号, $e^{j\omega_0 t}$ 的最小正周期为 $T = 2\pi / |\omega_0|$ 。

在数学或者电路分析课程里面, 我们已经熟悉了正弦信号 (Sinusoidal Signal), 常见的正弦信号可以如下表达:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1-22)$$

这里 $\omega_0 = 2\pi f_0$, 其中 f_0 称为频率 (Frequency), 以赫兹 (Hz) 为单位; ω_0 为角频率 (Angular Frequency), 以弧度/秒 (rad/s) 为单位。

虽然在数学上复数信号是存在的, 但是在工程上并不存在复数信号, 只存在实数信号, 例如正弦信号、指数衰减信号等。在信号处理领域, 我们引入复数信号的主要目的是为了简化数学分析。那么复数信号和实数信号通过什么来沟通或者互换呢? 下面来讨论一下复指数信号和正弦信号之间的关系。由欧拉公式有:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 t + \phi)} \quad (1-23)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega_0 t + \phi)} \} \quad (1-24)$$

上面两式表明, 复指数信号和正弦信号可以通过欧拉关系进行某种程度上的互换。也就是说, 可以通过式 (1-23) 或式 (1-24), 用复指数信号来表达正弦信号; 反过来, 也可以通过欧拉公式,

用正弦信号来表达复指数信号。本书中以复指数信号的分析为主。下面考虑一个以后要用到的复指数信号集 $\{e^{jk\omega_0 t}, k \in Z\}$ ，这个复指数信号集是由无穷多个形如 $e^{jk\omega_0 t}$ 的复指数信号组成的，其中 k 遍历整个整数域。在上述信号集里， ω_0 称为基波频率（Fundamental Frequency），基波频率所对应的周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 称为基波周期， $k\omega_0$ 称为 k 次谐波（Harmonic）频率，例如 ω_0 是基波频率， $2\omega_0$ 是二次谐波频率， $3\omega_0$ 是三次谐波频率，依此类推。

(4) 一般复指数信号。

如果不对 c 和 a 进行限制，也就是说 c 和 a 都是一般的复数。令 $c = |c|e^{j\theta}$ 和 $a = r + j\omega$ ，那么复指数信号 $x(t) = ce^{at}$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} x(t) = ce^{at} &= |c|e^{j\theta}e^{at} = |c|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} = |c|e^{rt}e^{j(\omega t + \theta)} \\ &= |c|e^{rt}\cos(\omega t + \theta) + j|c|e^{rt}\sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (1-25)$$

可以看出，式 (1-25) 中复指数信号的实部和虚部都是幅度指数衰减或者幅度指数增长的正弦振荡。

当 $r > 0$ 时，正弦振荡的幅度指数增长，下面取频率为 20Hz， $c = 1$ ， $r = 1.5$ ， $\theta = 0$ ，用 Matlab 画出式 (1-25) 的虚部 $|c|e^{rt}\sin(\omega t + \theta)$ 的波形，如图 1-14 所示。下面是 Matlab (Matlab 意为 Matrix Laboratory，即矩阵实验室，是目前科学研究和工程实践领域内常用的科学计算软件) 指令：

```
t=0:0.005:2;
x=exp(1.5*t).*sin(2*pi*20*t);
plot(t,x);
```

当 $r < 0$ 时，正弦振荡波形的幅度指数衰减，下面取频率为 20Hz， $c = 1$ ， $r = -1.5$ ， $\theta = 0$ ，并且用 Matlab 画出式 (1-25) 的虚部 $|c|e^{rt}\sin(\omega t + \theta)$ 的波形，如图 1-15 所示。下面是 Matlab 指令：

```
t=0:0.005:2;
x=exp(-1.5*t).*sin(2*pi*20*t);
plot(t,x);
```

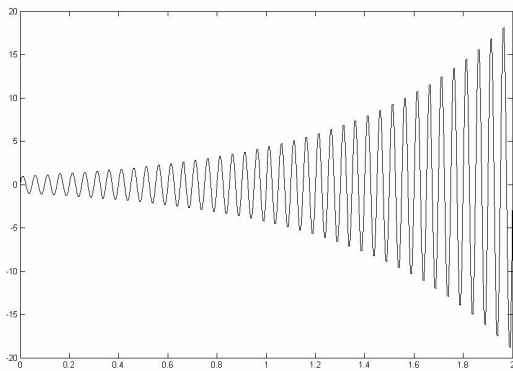


图 1-14 幅度指数增长的正弦振荡

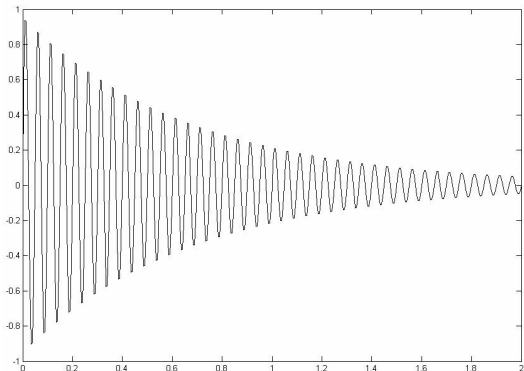


图 1-15 幅度指数衰减的正弦振荡

1.4.2 离散时间复指数信号

离散时间复指数信号的形式如下：

$$x[n] = ce^{\beta n} \quad (1-26)$$

离散时间正弦信号的形式如下：

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (1-27)$$

由欧拉关系, 我们有:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n \quad (1-28)$$

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 n + \phi)}\} \quad (1-29)$$

上面两个式子表明, 离散时间复指数信号和正弦信号可以通过欧拉关系进行某种程度上的互换。离散时间复指数信号和正弦信号的讨论与连续情况的讨论类似。

我们对比讨论一下离散时间复指数信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 与连续时间复指数信号 $e^{j\Omega_0 t}$, 可以观察到两者在以下两个方面有所不同:

(1) ω_0 与振荡快慢的关系。

连续时间复指数信号 $e^{j\Omega_0 t}$ 随着 ω_0 的增加, 振荡加快, 在数学上, 振荡的速度是没有极限的。

对于离散情况而言, 因为 $e^{j2\pi kn} = 1$, 则有:

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi k)n} \quad (1-30)$$

由此可见, ω_0 与 $\omega_0 + 2k\pi$ 产生的振荡一样快。利用欧拉关系有:

$$e^{j\pi n} = \cos \pi n = (-1)^n \quad (1-31)$$

图 1-16 展示了 $\cos \pi n$ 的波形, 从中可以看出, 时间每推进一格, 信号的值就发生一次反转, 显然这就是离散时间信号所能够达到的振荡速度的极限, 即 $\omega_0 = \pi$ 时 $e^{j\Omega_0 n}$ 的振荡最快。式 (1-30) 说明 $e^{j\Omega_0 n}$ 相对于 ω_0 而言是以 2π 为周期的, 所以 ω_0 在任何一个长度为 2π 的区间内的 $e^{j\Omega_0 n}$ 的取值就能够表达所有 $e^{j\Omega_0 n}$ 的取值, 一般来说, 这个长度为 2π 的区间取为 $[-\pi, \pi]$ 或者 $[0, 2\pi]$ 。综上所述, 离散时间复指数信号 $e^{j\Omega_0 n}$ 随着 ω_0 的增加, 振荡的快慢程度呈现周期性的变换, 振荡的速度是有上下极限的。

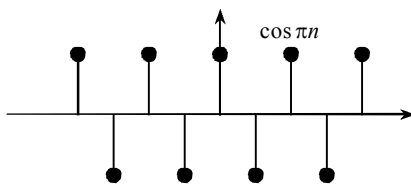


图 1-16 最快的序列振荡

(2) 周期性。

前面的分析已经说明, 无论 ω_0 的取值如何, 连续时间信号 $e^{j\Omega_0 t}$ 都是周期信号。下面来分析一下, 离散时间信号 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性。如果 N 是 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期, 那么 $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$, 必然有 $\omega_0 N = 2\pi m$, 也就是:

$$\omega_0 / 2\pi = m / N \quad (1-32)$$

其中, m 和 N 都是整数。在数学分析里面, 我们知道一个实数为有理数的充分必要条件是它能够表达为两个整数之比。由此可见, 离散时间信号 $e^{j\omega_0 n}$ 为周期信号的充分必要条件是 $\omega_0 / 2\pi$ 必须为有理数。

下面来研究一下周期序列的基波周期和基波频率。离散时间序列 $x[n]$ 周期性的定义和连续时间信号 $x(t)$ 周期性的定义是一样的, 即最小正周期 N 称为基波周期, $2\pi / N$ 称为基波频率。

研究一下离散时间复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的情况。如果 $e^{j\omega_0 n}$ 为周期信号, 则 $\omega_0 / 2\pi = m / N$ 。如果 m 和 N 互质, 显然 $N = m(2\pi / \omega_0)$ 是 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期, 可以证明, $m(2\pi / \omega_0)$ 也是 $e^{j\omega_0 n}$ 的基波周期, 这时基波

频率为 $\Omega_0/m = 2\pi/N$ 。注意, 这里的基波频率为 ω_0/m 而不是 ω_0 。同样, 基波周期 $N = m(2\pi/\omega_0)$, 而不是 $2\pi/\omega_0$ 。综上所述, 离散时间信号 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性是有条件的, 而且有其不同于连续时间周期信号的情况。下面通过一个例子来加深对离散时间信号周期性的理解。

例题 1.2 求序列 $x[n] = 1 + e^{j(2\pi/7)n} + e^{j(7\pi/2)n}$ 的基波周期。

解: 因为 $(2\pi/7)/2\pi = 1/7$, 所以信号 $e^{j(2\pi/7)n}$ 是周期的, 其基波周期为 7; 因为 $(7\pi/2)/2\pi = 7/4$, 所以信号 $e^{j(7\pi/2)n}$ 是周期的, 其基波周期为 4; 4 和 7 的最小公倍数为 28, 所以信号 $x[n]$ 的基波周期是 28。

因为离散时间复指数信号的周期性是有条件的, 而在很多场合下又必须保证其周期性, 因此引入一个离散时间复指数信号集 $\{\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, k \in Z\}$, 注意这里 n 是信号的自变量, k 只是参数。这个信号集里面的元素都是以 N 为周期的周期序列, 同时可以看到, 因为 k 和 n 在 $e^{jk(2\pi/N)n}$ 中是对等的, 因此 $e^{jk(2\pi/N)n}$ 对于参数 k 也具有周期性, 即:

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n] = \phi_k[n+N] \quad (1-33)$$

也就是说, 虽然信号集 $\{\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, k \in Z\}$ 具有无穷多个成员, 但是只有 N 个是互不相同的。

很多情况下, 可以将离散时间复指数序列看成是对连续时间复指数信号的采样, 那么为什么 $e^{j\omega_0 t}$ 的周期性是无条件的, 而 $e^{j\omega_0 n}$ 却是有条件的呢? 我们来考虑一下, 以 T 为采样间隔对连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 进行采样, 形成离散时间信号 $x[n]$:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n T} = e^{j(\omega_0 T)n} \quad (1-34)$$

序列 $x[n]$, 只有当 $\omega_0 T/2\pi = m/N$ 时, 才是周期的。图 1-17 说明, 通过对连续时间周期信号的采样而获得的离散时间信号不一定是周期的。这是容易理解的, 因为对连续时间周期信号进行采样, 如果采样频率与连续时间信号的振荡频率不合拍, 就会造成采样的结果是非周期的。

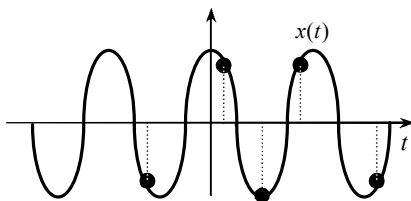


图 1-17 连续周期信号的采样不一定是周期的

1.4.3 离散时间单位阶跃信号和单位脉冲信号

离散时间单位阶跃 (Unit Step) 信号 $u[n]$ 的定义如下:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \quad (1-35)$$

可见, $u[n]$ 在 n 小于 0 的点上都为 0, 在 n 大于等于 0 的点上都为 1。图 1-18 所示是离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 的图示。与连续时间信号不同, 离散时间信号只有在自变量 n 为整数的时候才有意义, 这样就使得 $u[n]$ 的数学分析变得相对简单。

离散时间单位脉冲 (Unit Impulse) 信号 $\delta[n]$ 表示为:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1-36)$$

图 1-19 所示是离散时间单位脉冲信号 $\delta[n]$ 的图示。

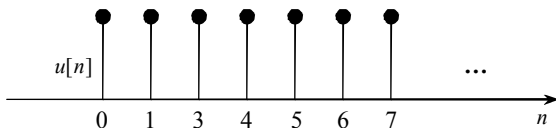


图 1-18 离散时间单位阶跃信号

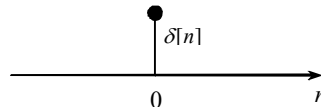


图 1-19 离散时间单位脉冲信号

可见, $\delta[n]$ 在 n 不等于 0 的点上都为 0, 在 n 等于 0 的点上为 1。容易得到, $u[n]$ 和 $\delta[n]$ 具有如下基本性质:

(1) 选择性质:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (1-37)$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (1-38)$$

(2) 差分性质:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (1-39)$$

上式说明, 离散时间单位脉冲信号是单位阶跃信号的一阶差分 (First Order Difference)。

(3) 求和性质:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (1-40)$$

分别讨论 $n > 0$ 和 $n < 0$ 的情况, 可以很容易地验证式 (1-40)。通过图 1-18, 从另外一个角度来看, $u[n]$ 可以看成是由一根根的“电线杆” $\delta[n-k]$ 加起来的。同时可以对式 (1-40) 进行变量变换 $m = n - k$ (注意, 在变量替换中, 求和变量是 m 和 k , n 看成常量), 就可以将式 (1-40) 改写成:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \stackrel{m=n-k}{=} \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (1-41)$$

这样就证实了上面的观点: $u[n]$ 可以看成是由无穷多个 $\delta[n-k]$ (其中 $k \geq 0$) 累加而成的。

1.4.4 连续时间单位阶跃信号和单位冲激信号

连续时间单位阶跃信号定义为:

$$u[t] = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1-42)$$

可见, 当 $t < 0$ 时, $u(t)$ 等于 0; 当 $t \geq 0$ 时, $u(t)$ 等于 1。图 1-20 所示是连续时间单位阶跃信号的图示。阶跃信号的作用类似于电路里面的开关。

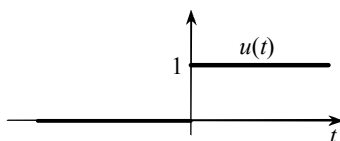


图 1-20 连续时间单位阶跃信号

下面讨论一个特殊函数——狄拉克函数 $\delta(t)$ (Dirac Delta Function), 它的定义由以下两个命题组成:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \quad (1-43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-44)$$

直观地理解, $\delta(t)$ 在不为 0 的时刻都为 0, 在 0 时刻为无穷大, 但是整个信号的能量为 1。我们用一个向上的箭头来表示一个冲激信号, 图 1-21 所示是狄拉克函数 $\delta(t)$ 的图示。

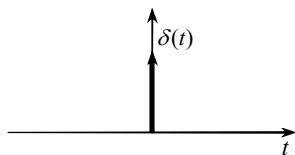


图 1-21 狄拉克函数

为了加深对特殊信号 $\delta(t)$ 的理解, 我们给出 $\delta(t)$ 的另外一个定义: $\delta(t) = du(t)/dt$ 。下面用极限方式来分析一下 $\delta(t) = du(t)/dt$ 。由于 $u(t)$ 在 $t=0$ 处不连续, 无法求导, 但是我们考虑图 1-22 (a) 所示的连续函数 $u_{\Delta}(t)$, 其导数是图 1-22 (b) 所示的函数 $\delta_{\Delta}(t)$, 即:

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} \quad (1-45)$$

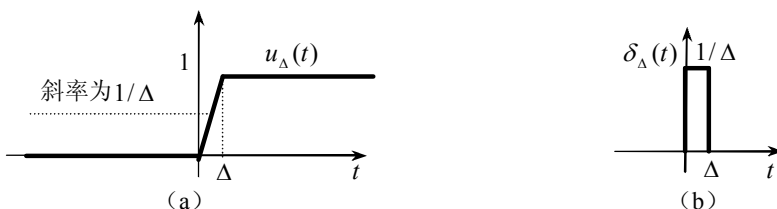


图 1-22 连续时间单位冲激信号的近似

可以看到, $\delta_{\Delta}(t)$ 波形下的面积等于 1, 或者说 $\delta_{\Delta}(t)$ 的能量等于 1。 $\Delta \rightarrow 0$, 那么 $u_{\Delta}(t) \rightarrow u(t)$, 在 $\Delta \rightarrow 0$ 的过程中 $\delta_{\Delta}(t)$ 的面积是不变的, 于是可以定义:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1-46)$$

狄拉克函数 $\delta(t)$ 也称为单位冲激 (Unit Impulse) 信号, 而 $k\delta(t)$ 则称为冲激强度为 k 的冲激信号。由定义可知 $\delta(t)$ 具有与 $\delta[n]$ 类似的性质:

(1) 单位强度性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-47)$$

(2) 微分性质: 这与 $\delta[n]$ 的差分性质类似, 即:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1-48)$$

(3) 积分性质: 这与 $\delta[n]$ 的求和性质类似, 即:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1-49)$$

图 1-23 对积分性质做了说明。通过图 1-23 容易看出, 当 $t < 0$ 时, 积分区间不包含原点, 因此积分值为 0; 当 $t \geq 0$ 时, 积分区间包含原点, 因此积分值为 1。

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-50)$$

(4) **选择性质:** 同样通过极限方式来说明连续时间冲激函数的选择性质。在图 1-24 中, 如果 $x(t)$ 在 0 点连续, 那么:

$$x(t)\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx \lim_{\Delta \rightarrow 0} x(0)\delta_{\Delta}(t) = x(0)\delta(t) \quad (1-51)$$

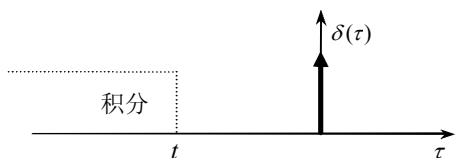


图 1-23 单位冲激信号的积分性质

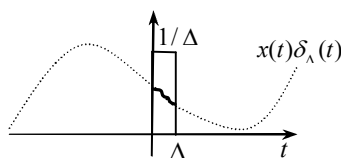


图 1-24 单位冲激信号的选择性质

同理:
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-52)$$

可见, $\delta(t)$ 具有与 $\delta[n]$ 类似的选择特性。

灵活地运用单位阶跃信号 $u(t)$ 可以使得信号的表达更加解析化, 例如可以用 $u(t) - u(t-1)$ 来表达一个方波信号。一般地, 如图 1-25 所示的方波信号就可以这样来表达:

$$x(t) = Mu(t-a) - Mu(t-b) \quad (1-53)$$

用 $\sin 100t[u(t) - u(t-T)]$ 可以表达一个持续时间为 T 的正弦波信号。

例题 1.3 试解析地表示图 1-26 所示的信号。

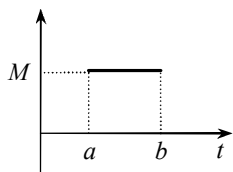


图 1-25 方波信号

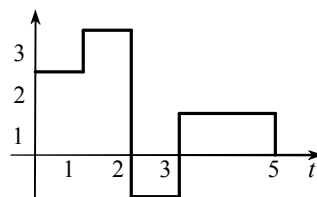


图 1-26 例题 1.3 图

解: 图中所示信号可以表示为 4 个方波信号的和, 所以有

$$x(t) = 2[u(t) - u(t-1)] + 3[u(t-1) - u(t-2)] - [u(t-2) - u(t-3)] + [u(t-3) - u(t-5)]$$

化简得 $x(t) = 2u(t) + u(t-1) - 4u(t-2) + 2u(t-3) - u(t-5)$

例题 1.4 已知信号 $x(-2t)$ 如图 1-27 所示, 画出信号 $x(t+1)u(-t)$ 的波形。

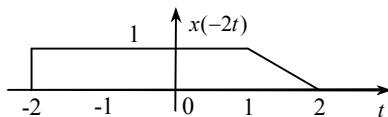


图 1-27 例题 1.4 的波形

解: 先求出 $x(t)$ 的波形。设 $y(t) = x(-2t)$, 那么 $y(-t) = x(2t)$, $y(-t/2) = x(t)$, 可见将 $x(-2t)$ 反转, 再尺度变换就得到了 $x(t)$ 。图 1-28 (a) 给出了 $x(2t)$ 的波形, 图 1-28 (b) 给出了 $x(t)$ 的波形, 图 1-28 (c) 给出了 $x(t+1)$ 的波形, 这是 $x(t)$ 向左移位的结果, 图 1-28 (d) 给出了 $x(t+1)u(-t)$ 的

波形, 这是 $x(t+1)$ 截断 $t > 0$ 部分的结果。

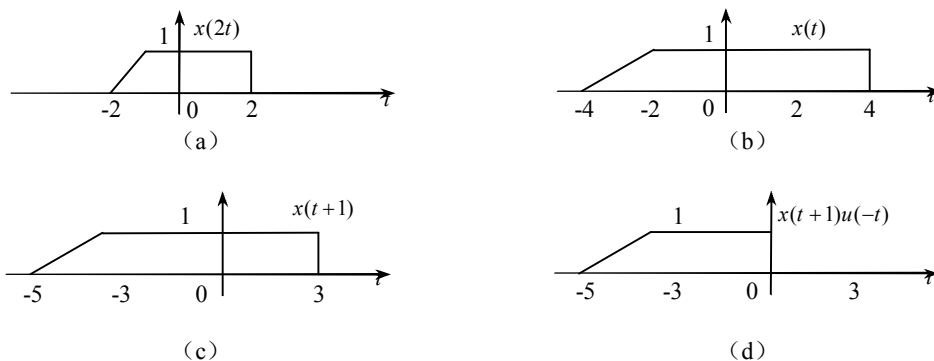


图 1-28 例题 1.4 的解题过程

1.5 系统的概念

所谓系统 (System) 就是对激励信号进行响应, 并输出响应信号的装置、规则或者过程。用数学的语言来讲, 系统就是对信号的变换。

如图 1-29 所示, 系统的输入信号有时也称为激励 (Excitation), 系统的输出信号有时也称为响应 (Response), 记为: $y(t) = S[x(t)]$ 或 $x(t) \rightarrow y(t)$ 。

图 1-30 给出了一个简单的系统, 它由单个耗能元件电阻构成, 当输入为电压 $u(t)$, 输出为电流 $i(t)$ 时, 系统遵循欧姆定理实施变换, 即 $i(t) = u(t)/R$ 。自然界也可以看成是典型的系统, 称为生态系统。在乱砍滥伐为输入的激励下, 系统根据复杂的生态法则, 会给出洪水泛滥的输出。

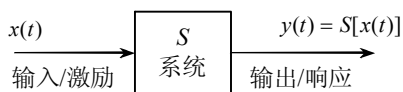


图 1-29 系统的表示

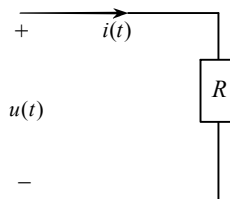


图 1-30 一个简单的电路系统

如图 1-31 (a) 所示, 处理连续时间信号的系统称为连续时间系统 (Continuous Time System), 或者称为模拟系统 (Analog System 或 Simulated System); 如图 1-31 (b) 所示, 处理离散时间信号的系统称为离散时间系统 (Discrete Time System), 在一般的工程文献中, 也称为数字系统 (Digital System)。



图 1-31 连续时间系统和离散时间系统

下面讨论一下系统之间的互连 (Interconnection)。

(1) 系统的级联 (Series)。

图 1-32 所示是系统级联的情况, 前面一个系统 S_1 的输出 $y_1(t)$ 作为后面一个系统 S_2 的输入。系统的级联表示的是复合变换, 即 $y_1(t) = S_1[x(t)]$, 那么

$$y(t) = S_2[y_1(t)] = S_2\{S_1[x(t)]\} = S_2S_1[x(t)]$$

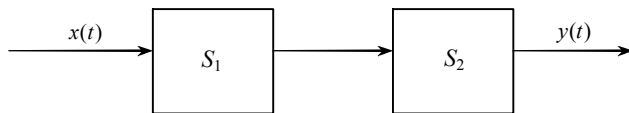


图 1-32 系统的级联

系统的级联与电路的串联虽然在形式上差不多, 但实际上并不是一回事。

(2) 系统的并联 (Parallel)。

图 1-33 所示是系统并联的情况, 两个系统的输出加起来成为总的输出, 即:

$$y(t) = S_1[x(t)] + S_2[x(t)] \quad (1-54)$$

这里, 系统的并联与电路的并联也仅仅是形似而已, 以图 1-34 所示的电路为例, 取 $i(t)$ 为输入, $u(t)$ 为输出, 并将 R_1 、 R_2 看成两个系统, 于是有: $u(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$ 。如果用系统分析的框图表示, 则上述串联电路应该是图 1-35 给出的系统并联。

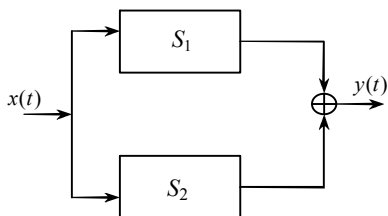


图 1-33 系统的并联

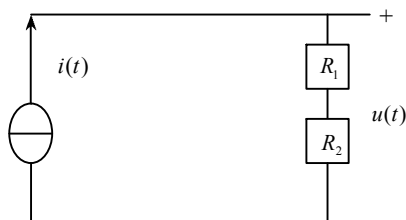


图 1-34 一个串联电路

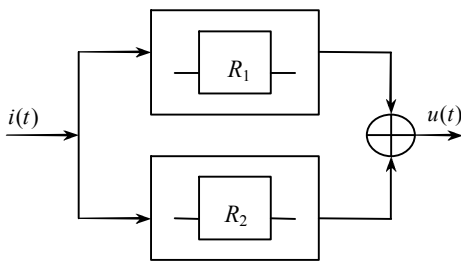


图 1-35 在某种情况下串联电路反映在系统上是并联

1.6 系统的基本性质

系统是具有一些性质的, 这些性质对于系统分析是非常重要的。下面对系统的一些重要性质逐一进行分析。

1.6.1 记忆性质

如果一个系统每一时刻的输出值仅仅取决于该时刻系统的输入值, 则称该系统为无记忆系统 (Memoryless System); 反之称为记忆系统 (System with Memory)。

对于连续时间的无记忆系统而言, t_0 时刻的输出值 $y(t_0)$ 仅仅取决于 t_0 时刻的输入值 $x(t_0)$, 与其他时刻的输入值无关。对于离散时间的无记忆系统而言, n_0 时刻的输出值 $y[n_0]$ 仅仅取决于 n_0 时刻的输入值 $x[n_0]$ 。如图 1-36 所示, 由电阻组成的电阻电路是典型的无记忆系统, 其解析表达式为:

$i(t) = \frac{1}{R}u(t)$ 。含有储能元件的动态电路是典型的连续时间记忆系统, 图 1-37 所示是一个电容器系

统的例子, 其解析表达式为: $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ 。

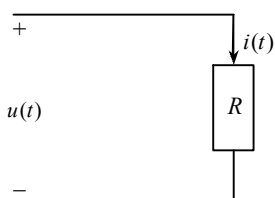


图 1-36 电阻电路是典型的无记忆系统

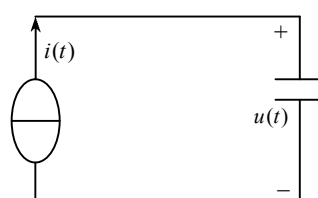


图 1-37 动态电路是典型的记忆系统

对于上述电容器系统来说, t_0 时刻输出信号的值 $u(t_0) = 1/C \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau$ 不仅仅取决于 t_0 时刻输入信号的值 $i(t_0)$, 而且还取决于电流 $i(t)$ 在 t_0 时刻以前的所有数值, 所以电容器是一个记忆系统。

对于电子系统而言, 电容、电感等动态元件被称为**储能元件** (Energy Storing Element)。一般来说, 由恒压源、恒流源和电阻组成的静态电路是无记忆的。含有储能元件的动态电路是有记忆的。**累加器** (Accumulator) 是一个典型的离散时间记忆系统, 其解析表达为:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (1-55)$$

也就是说 n_0 时刻的输出值 $y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]$ 不仅仅取决于 n_0 时刻的输入值 $x[n_0]$, 而且还取决于 x 在 n_0 时刻以前的所有数值。

如果将气候看成是一个系统, 在这个系统里面, 将阳光看成是系统的输入, 气温看成是系统的输出。由于水库、大气层、森林等“储能元件”的存在, 使得这个气候系统变成了记忆系统。在夜晚, 虽然输入几乎为零, 但是这些储能元件“记忆”了白天的输入, 因此夜晚的气温不至于有太大的下降; 在白天, 虽然输入很大, 但是储能元件“记忆”了夜晚的低温, 因此气温也不至于有太大的上升。在月球上, 由于这些“储能元件”几乎没有, 所以月球可以近似为一个非记忆系统, 阳光直射的时候温度非常高, 没有阳光的时候却异常地冷。

1.6.2 可逆性 (Invertibility)

如果一个系统在不同输入信号的激励下会产生不同的输出信号, 则该系统称为**可逆系统** (Invertible System), 否则称为**不可逆系统** (Noninvertible System)。

集合论的分析使我们知道可逆系统的一个性质: 可逆系统总存在一个**逆系统** (Inverse System), 使得两者级联后, 成为恒等系统。集合论已经证明上述性质与定义是等价的。我们将系统 S 的逆系统记为 S^{-1} 。

图 1-38 显示了系统与其逆系统级联成为一个恒等系统的情况。显然, 如果系统 S^{-1} 是系统 S 的逆系统, 那么系统 S 也是系统 S^{-1} 的逆系统。图 1-39 对这个命题进行了说明, 因此我们说, 系统 S 和系统 S^{-1} 是互为可逆的系统。下面是一个连续时间可逆系统的例子, 其系统的解析表达为

$y(t)=2x(t)$ ，在这里，求逆系统的过程可以理解为通过输出求输入的过程。我们看到 $x(t)=y(t)/2$ ，于是，逆系统应该是 $y(t)=x(t)/2$ 。

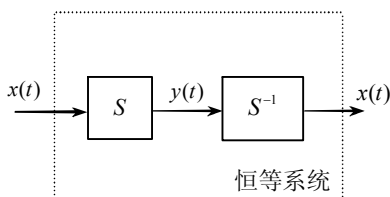


图 1-38 系统与其逆系统的级联等效为一个恒等系统

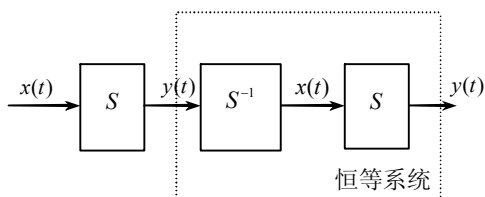


图 1-39 系统、逆系统和系统的级联

下面是一个离散时间可逆系统的例子，系统的解析表达为： $y[n]=\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ 。我们观察到， $y[n]$ 只比 $y[n-1]$ 多了一项，多出来的这一项是 $x[n]$ ，因此将两者相减可以得到： $y[n]-y[n-1]=x[n]$ ，于是逆系统是： $y[n]=x[n]-x[n-1]$ 。

由此可见，与连续时间系统中积分和微分为互逆变换一样，在离散时间系统中，累加和差分是一对互逆变换。当然，有些可逆系统的逆系统可能无法解析地表达，甚至无法物理实现。但是只要逻辑上存在这样一个逆系统，就会给今后的系统分析和设计带来便利。

解析式 $x(t)=0$ 给出了一个不可逆系统的例子。在这里，无论输入信号是什么，输出信号都为零，也就是说，不同的输入产生相同的输出，因此这是一个不可逆系统。

解析 $y(t)=x^2(t)$ 式给出了另外一个不可逆系统的例子。在这里，系统在输入信号 $x(t)$ 和输入信号 $-x(t)$ 的激励下，输出都是 $x^2(t)$ ，也就是说，不同的输入产生相同的输出，因此这也是一个不可逆系统。

1.6.3 因果性 (Causality)

如果一个系统在任何时刻的输出仅仅取决于现在时刻以及以前时刻的输入，则称之为因果系统 (Causal System)；否则称为非因果系统。从字面上理解，因果就是前因（系统在现在时刻以及以前时刻的输入）后果（系统在此时刻的输出）的意思。毫无疑问，无记忆系统是一种特殊的因果系统。记忆系统可能是因果系统，也可能不是因果系统，是因为记忆系统的当前输出也可能和未来的输入值有关。

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ 表示的累加器就是一个因果系统，因为 n_0 时刻的输出信号的值 $y[n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n_0} x[k]$ 取决于 n_0 时刻的输入信号的值 $x[n_0]$ ，以及输入信号 $x[n]$ 在 n_0 时刻以前的值，而与输入信号 $x[n]$ 在 n_0 时刻以后的值无关。解析式 $y(t)=x(t)+x(t+1)$ 所表示的系统是一个非因果系统，因为 t 时刻的输出还取决于 t 时刻的以后 $t+1$ 时刻的输入。

当系统的自变量是自然时间时，在实时的情况下，实际系统都是因果的，因为不可知的未来不会影响到现在。但是，在科幻电影里面，所表现的系统往往是非因果的。例如电影《终结者 2》就体现了这种非因果性。影片中的小男孩在 1991 年时的生存状态（可以认为是系统的输出）不但取决于 1991 年以前的状态，如照料和营养状况等（这些可以认为是系统的输入），而且还取决于 1991 年以后的 2029 年，那时他已经成为了人类起义军的首领，但是他制造的机器人能否战胜人工智能制造的机器人，却是他在 1991 年能否生存的关键。

在自变量不是时间的情况下，例如静止图像处理，静止图像的自变量是空间坐标，因此涉及的系统可以是非因果系统，如对图像进行插值处理，当前位置的值需要由周边像素的值进行某种综合

而得到。在自变量不是实时时间的情况下,例如在事后分析、离线的地震波分析、探伤信号分析等工作中,许多算法和系统也可以是非因果系统。如平滑滤波时,就需要当前时刻以后的若干时刻点的值。

1.6.4 稳定性 (Stabilization)

稳定性的讨论在很多情况下都是很重要的。至于稳定性的严格定义,在不同的理论体系中则略有不同。在本课程中,我们这样来定义稳定性:如果系统的输入信号有界,系统的输出信号必定有界,则称系统是稳定的 (Stable), 否则称为非稳定的 (Nonstable)。

信号有界的定义和函数有界的定义是一样的,也就是说:如果存在一个正数 M 使得信号在任何时刻点的模都小于 M , 则将该信号称为有界的,形式地表达就是:

$$\exists M: \forall t: |x(t)| < M \quad (1-56)$$

体现在波形上,如图 1-40 所示,有界信号的波形被限制在一个容许带内。

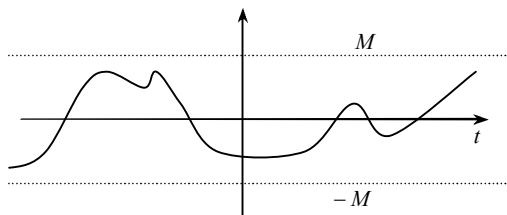


图 1-40 有界的信号

解析式 $y(t) = x(t-1)$ 表示的是一个延时系统,这是一个稳定系统的例子,这是因为,输出信号的模的最大值等于输入信号的模的最大值,那么输入信号有界,输出信号必然有界。

解析式 $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 表示的积分系统则是一个非稳定系统的例子,我们通过反例 (Counterexample) 来证明该解析式表示的积分系统是不稳定的。当输入为阶跃信号时,即 $x(t) = u(t)$ 时,输入信号是有界的,而输出信号

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t d\tau = t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

随着 t 的增加不断增加,没有上界,也就是说,找不到一个正数 M 使得信号 $y(t)$ 在所有的时刻的模都小于 M , 因此 $y(t)$ 是无界的。所以,积分系统是非稳定的。

1.6.5 时不变性 (Time Invariance)

一个系统,如果它的输入信号产生一个时间移位,其输出信号也一定产生一个相同的时间移位,则称该系统为时不变系统 (Time-Invariant System), 否则称该系统为时变系统 (Time-Varying System)。上述定义可以形式地表示为:

如果 $x(t) \rightarrow y(t)$, 则 $\forall t_0: x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$; 如果 $x[n] \rightarrow y[n]$, 则 $\forall n_0: x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$ 。

解析式 $y(t) = \sin[x(t)]$ 给出的是一个时不变系统的例子。可以这样来考虑,在 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的输入激励下,系统变换分别为 $x(t) \rightarrow \sin[x(t)]$ 和 $z(t) \rightarrow \sin[z(t)]$ 。如果令 $z(t) = x(t-t_0)$, 并代入上式右边,则系统的输出为: $\sin[z(t)] = \sin[x(t-t_0)]$, 也就是说,当输入信号产生一个时间移位,成为 $x(t-t_0)$ 时,输出信号变成了 $\sin[x(t-t_0)]$, 而 $\sin[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$, 输出信号也产生了一个相同

的时间移位，因此我们说系统是时不变的。

解析式 $y[n] = nx[n]$ 给出的则是一个时变系统的例子，同样考虑在 $x[n]$ 和 $z[n]$ 的激励下的系统变换，即： $x[n] \rightarrow nx[n]$ 和 $z[n] \rightarrow nz[n]$ 。如果，令 $z[n] = x[n - n_0]$ ，并代入上式右边，则有 $nz[n] = nx[n - n_0]$ 。因此，当输入为 $x(t - t_0)$ 时，输出为 $nx[n - n_0]$ ，由于 $y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0]$ 。系统在 $x(t - t_0)$ 激励下的输出并没有产生一个相同的时间移位，因此系统是时变的。

解析式 $y(t) = x(2t)$ 表达的是一个连续时间的时变系统，同样有： $x(t) \rightarrow x(2t)$ 和 $z(t) \rightarrow z(2t)$ 。如果，令 $z(t) = x(t - t_0)$ ，对变量 t 做变量替换 $t = 2t'$ ，则有 $z(2t') = x(2t' - t_0) \neq y(t' - t_0)$ ，这说明系统是时变的。

再举一个时变系统的例子，若离散系统的解析式为 $y[n] = x[-n]$ ，则有 $x[n] \rightarrow x[-n]$ 和 $z[n] \rightarrow z[-n]$ 。如果，令 $z[n] = x[n - n_0]$ ，对变量 n 做变量替换 $n = -n'$ ，则有 $z[-n'] = x[-n' - n_0] \neq y[n' - n_0]$ ，这说明系统是时变的。

在理想情况下，大多数电子类系统都是时不变系统。例如，一盒录音带今天听是这样，明天听（有一天的时间移位）还是这样。但是，如果仔细推敲的话，因为磁头、磁带会有磨损，电子元件会老化，因此所有的模拟电子系统又都是时变的。所以说，从严格的意义上讲，实际系统的时变是绝对的，时不变是相对的。时不变系统只是一种理想的情况，是我们对许多实际系统的合理简化。

时变系统产生的重要原因之一就是热敏效应，我们知道，随着温度的升高，导体内的电子热运动加剧，电阻变大。例如，热敏电阻就是利用这个原理，它是典型的时变系统，它的电阻值随着温度的变化而变化， $i(t) = u(t)/R(t)$ 。

许多情况下我们要采取必要的手段来避免热敏带来的时变性，例如，显像管可能需要预热灯丝；大功率照明灯具可能需要缓慢点燃。然而有的情况下，我们却要有意识地利用时变性，例如利用热敏电阻来制造显示器的消磁电路。

社会系统和市场系统也是时变系统，你发现市场上一样产品好卖，便去组织生产，延时几个月后，产品出来了，结果却可能是滞销产品。俗话说“此一时也，彼一时也”，揭示的就是社会系统的时变性。

1.6.6 线性 (Linearity)

一个系统，如果同时满足叠加性和齐次性，则称为线性系统 (Linear System)，否则称为非线性系统 (Nonlinear System)。

上述定义可以形式地表示为：

如果 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ ， $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ ，则

$$(1) \text{ 叠加性 (Superposition): } x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (1-57)$$

$$(2) \text{ 齐次性 (Homogeneity): } ax_1(t) \rightarrow ay_1(t) \quad (1-58)$$

对线性系统综合运用齐次性和叠加性，可以得到：

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (1-59)$$

推而广之，则有

$$\sum a_k x_k(t) \rightarrow \sum a_k y_k(t) \quad (1-60)$$

在式 (1-59) 中，如果令 $a = -b$ ， $x_1(t) = x_2(t)$ ，则 $ay_1(t) + by_2(t) = 0$ ，也就是说，线性系统对零输入的响应是零输出。我们考虑形如 $y(t) = ax(t) + b$ 的系统。虽然，该系统的输入输出表达式是一

个线性函数,但是并不满足对线性系统的定义。但是,这一类的系统在线性电路里面是常见的,我们称之为**增量线性系统**。在电路中,将输入为零时系统的响应称为**零输入响应**(Zero-Input Response),将状态为零时系统的响应称为**零状态响应**(Zero-State Response)。显然,零输入响应不为零的电路系统就是典型的增量线性系统。在电路分析的课程中,电路系统的完全响应等于零输入响应加上零状态响应,但是,我们认为这种分析方式不适合于信号处理的理论体系,因此,在本课程中我们强调,**增量线性系统不是线性系统!**

本节介绍的有关系统的概念很简单,但是都是非常重要的。在后面各章中,我们将主要以线性时不变系统为对象研究讨论信号的变换和处理原理。

研讨环节:信号与系统的分析和综合

引言

1. 信号的分析与综合

对于信号而言,分析是指将信号在时域中进行分解,分解成一些基础信号的线性加权和。而得到的加权值就是信号分析的结果。举个形象的例子,比如用积木搭建出了一种复杂的形状,这一形状就好比是原信号,而一块块的积木就好比是基础信号。对信号的分析就好比要弄明白在搭建复杂形状的过程中都是用了哪些积木,使用了几个。如使用了中等大小的圆形2个,使用了大三角形1个,小三角形1个等。获得这个清单的过程就是信号分析的过程,而最终我们真正得到的就是不同积木使用的数目,这个“数目”就是信号分析希望得到的加权值。

对于信号而言,综合是分析的反过程,是给定了基础信号的加权值,我们按照加权值将信号组合起来得到原信号的过程。好比我们知道了使用各种积木的数目,我们要按照正确的方法把它们组合起来形成一定的形状。

在信号分析中,原信号是已知的,加权值是我们要求取的。在综合中,加权值是已知的,原信号是我们要求取的。本课程要讨论的傅里叶级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换都属于信号分析的范畴,它们的反变换则属于信号综合的范畴。如在傅里叶级数里选用的就是有倍频关系的正弦信号作为基础信号,在傅里叶变换中则采用频率连续变化的正弦信号作为基础信号。

2. 系统的分析与综合

对于系统而言,所谓分析,是指在系统已给定的前提下,我们使用已经建立的各种理论和实验测量手段对系统的性质进行探究,并最终确定系统满足哪些性质的过程。例如,我们拿到了一个电子元器件组成的电路板,我们通过建模分析来判断此系统是否是稳定的,是否是因果的,是否是时不变的,系统的上升时间、稳定时间等具体参数又是多少等,这样一个过程就被称为系统的分析。

对于系统而言,所谓综合,是指我们已经知道系统具备哪些性质,满足哪些参数,反过来设计一个具体的系统,这个系统能满足提出的各种参数和性质。所以综合可以看作是一个设计过程,根据指标设计系统。这里的设计可以仅仅停留在纸面,也可以实现为具体的软硬件系统。

在系统分析中,系统是给定的,未知的是系统的各种性质和各种参数;在系统的综合中给定的系统的性质和各种参数,未知的是系统的具体结构和实现方式。

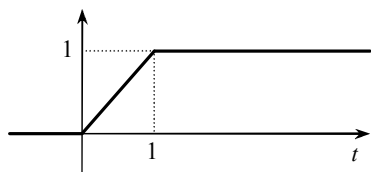
系统的分析与综合在本门课中涉及是比较少的,在后期的控制理论课程学习中才会陆续接触到。

研讨提纲

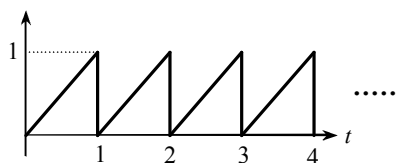
1. 通过资料检索，举出信号的分析与综合、系统的分析与综合实际的工程例子并加以说明。
2. 通过资料检索，尽可能多地举出信号分析与综合的方法，并说明其基本思想和实现思路，以及它们彼此的基本差别。
3. 通过资料检索，尽可能多地举出系统分析与综合的方法，并理解其基本思想和实现思路。

思考题与习题一

- 1.1 画出信号 $(t-2)[u(t-2)-u(t-3)]$ 和 $u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ 的波形。
- 1.2 写出下列信号的解析表达式。

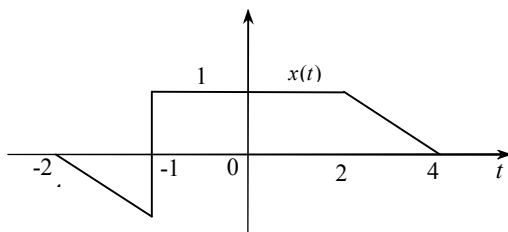


题 1.2 图 (a)



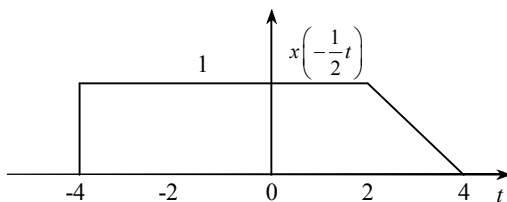
题 1.2 图 (b)

- 1.3 信号 $x(t)$ 如题 1.3 图所示，请画出以下信号的波形：
 - (a) $x(t-1)$
 - (b) $x(2t-1)$
 - (c) $x(2-t)$
 - (d) $x(2-t/2)$
 - (e) $[x(t)+x(-t)]u(t)$



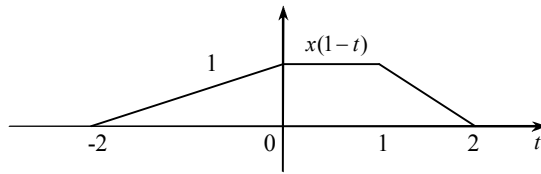
题 1.3 图

- 1.4 信号 $x(-\frac{1}{2}t)$ 如题 1.4 图所示，请画出信号 $x(t+1)u(-t)$ 的波形，其中 $u(t)$ 为单位阶跃信号。

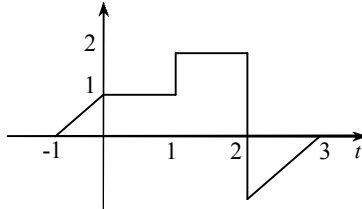


题 1.4 图

- 1.5 已知信号 $x(1-t)$ 如题 1.5 图所示，请画出信号 $x(2t+1)u(-t)$ 的波形。
- 1.6 试用阶跃信号来表示题 1.6 图所示的信号。



题 1.5 图



题 1.6 图

1.7 画出下列信号的波形:

(a) $x(t) = u(-2t+3) - u(-2t-3)$

(b) $x(t) = u(t^2-9) - u(t^2-3)$

(c) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\sin \pi(t-n)u(t-n)]$

(d) $x(t) = tu(t) - \sum_{n=1}^{\infty} u(t-n)$

1.8 判断下列离散时间序列是否具有周期性, 如果有, 请求出其基波周期。

(a) $\cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$

(b) $e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$

(c) $1 - e^{j\frac{5\pi n}{3}} + e^{-j\frac{3\pi n}{5}}$

(d) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-3k] + \delta[n-1-3k]\}$

(e) $[\cos(2\pi n)]u[n]$

1.9 试确定下列系统是否具备以下性质: ①记忆, ②时不变, ③线性, ④因果, ⑤稳定。

(a) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x^2[k]$

(b) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

(c) $y[n] = x[n^2]$

(d) $y[n] = n^2 x[n]$

(e) $[\sin 2t]x(t)$

(f) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$

(g) $y(t) = x(t/2)$