第 1 章　随机事件及概率

1.1　随 机 事 件

一、随机试验

人们在实际生活中会遇到两类现象：一类称之为**确定性现象（必然现象）**，例如，向空中抛掷一石子，石子落地，同性电荷相斥，异性电荷相吸等；另一类称之为**随机现象（偶然现象）**，例如，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（规定刻有国徽的一面为正面）朝上，也可能是反面朝上，在合格品率为 85%的产品中任取一件产品，有可能取到的是合格品，也有可能取到的是不合格品.

在研究实际问题时，需要做各种各样的观察与试验，一般满足以下三个条件的试验称为**随机试验**：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是事先明确可知的；

（3）每次试验之前不能确定哪一个结果一定会出现.

随机试验包括对随机现象进行观察、测量、记录或进行科学实验等. 我们以后提到的试验都是指随机试验，也简称为**试验**，通常用字母 E 表示，例如：

E_1：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数.

E_2：一箱中装有标号从 1 到 30 的 30 个红、白两种颜色的乒乓球，从箱中任意抽取 1 个球，（1）观察其号数；（2）观察其颜色.

E_3：测量车床加工零件的直径.

E_4：观察某厂生产的灯泡的使用寿命.

对于随机现象，人们经过长期的观察或进行大量的试验发现：发生的结果并非是杂乱无章的，而是有规律可寻的. 例如，大量重复地抛掷一枚硬币，得到正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半；同一门炮发射多发炮弹射击同一目标，弹着点按照一定的规律分布. 在大量的重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是所谓的**统计规律性**. 而概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

二、样本空间

对于随机试验，人们感兴趣的是试验结果，即每次随机试验后所发生的结

果．将随机试验E的每一个可能的结果，称为随机试验E的一个**样本点**，通常用字母ω表示．随机试验E的所有样本点组成的集合称为试验E的**样本空间**， 通常用字母Ω表示．

例 1　E_1：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数．

“出现i点”，$i=1,2,\cdots,6$是E_1的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}.$$

例 2　E_2：一箱中装有标号从 1 到 15 的 15 个红、白两种颜色的乒乓球，（1）从箱中任意抽取 1 个球，观察其号数；（2）从箱中任意抽取 2 个球，观察其颜色．

（1）观察其号数．

“取得i号球”，$i=1,2,\cdots,15$是E_2的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{15}\};$$

（2）观察其颜色．

试验的全部样本点是：(红，红)，(红，白)，(白，白)，其中(红，红)表示两球都是红球，依此类推，则样本空间为

$$\Omega_2=\{(\text{红，红}),(\text{红，白}),(\text{白，白})\}.$$

例 3　E_3：测量车床加工零件的直径．

E_3的样本点：ω_x表示“测量的直径是x毫米”$(a\leqslant x\leqslant b)$.

所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{\omega_x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

例 4　E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其燃烧寿命．

$\omega_t=$“测得灯泡燃烧寿命为t小时”$(0\leqslant t<+\infty)$是E_4的样本点，所以样本空间可表示为

$$\Omega=\{\omega_t \mid 0\leqslant t<+\infty\}.$$

从上述例题可以看到：样本空间可以是一维点集或多维点集，可以是离散点集，也可以是某个区域，可以是有限集或无限集（对应的称为有限样本空间或无限样本空间）．

三、随机事件

随机事件　一个随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为该试验的随机事件（简称事件），通常用字母A、B、C等表示．实际上，随机事件是由若干个样本点组成的集合，是样本空间的子集．

基本事件　试验的每一可能的结果称为基本事件．一个样本点ω组成的单点集$\{\omega\}$就是随机试验的基本事件．

必然事件　每次试验中必然发生的事件称为必然事件．上述内容已给出样本空间的概念．在每次试验中，如果将样本空间也看成是事件的话，则这个事件必然发生．因而样本空间是必然事件．所以我们仍用Ω表示必然事件．

不可能事件　每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件．它不含任何样本点，可理解为空集，记为$\varnothing$．

注（1）样本空间的构成是由试验的条件和观察的目的所决定．

（2）基本事件是事件的一种，一般的事件是由若干个基本事件共同组成的，因而是样本空间的子集，通常又称其为复合事件．

（3）随机事件的另一个定义：样本空间Ω的某个子集．

（4）事件A发生当且仅当试验中出现A中包含的某个基本事件．

四、事件之间的关系和运算

在一个样本空间Ω中，包含许多的随机事件．研究随机事件的规律，往往是通过对简单事件规律的研究去发现更为复杂事件的规律．为此，我们引入事件之间的一些重要关系和运算．由于任一随机事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的．

1．事件的包含及相等

如果“事件A的发生必然导致事件B的发生”，则称事件B包含事件A，也称A是B的子事件，记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

在上述例 1 掷骰子的试验中，设$A=\{2\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，显然$A \subset B$，即事件A是事件B的子事件．

注意，对任一事件A都有子事件关系

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

我们给出事件包含关系的一个直观的几何解释，见图 1.1．

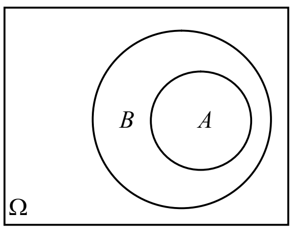

图 1.1　$A \subset B$

如果有$A \subset B$且$B \supset A$，则称事件A与事件B相等，记作$A=B$．

易知，相等的两个事件A、B总是同时发生或同时不发生，亦即$A=B$等价于它们是由相同的样本点组成的．

2．事件的和（并）

“事件A与B中至少有一个事件发生”这样的事件称为事件A与B的和事件，记作$A \cup B$．

可见，$A \cup B$ 是由所有属于 A 或属于 B 的样本点组成．事件 A 与 B 的和事件 $A \cup B$ 对应集合 A 与 B 的并集，如图 1.2 阴影部分所示．

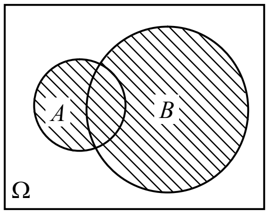

图 1.2　$A \cup B$

例如，在掷一枚骰子的试验中，若设事件 $A = \{2,3,4\}$ ，事件 $B = \{1,2\}$ ，则和事件为

$$C = A \cup B = \{1,2,3,4\}，表示\{掷出的点数小于 5\}．$$

和事件可以推广到有限多个事件与可列多个事件之和的情形：

对于“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

对于“可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件，用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

3．事件的积（交）

“事件 A 与 B 同时发生”这样的事件称作事件 A 与 B 的积（或交）事件，记作

$$A \cap B 或 AB .$$

AB 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成．如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 AB 对应集合 A 与 B 的交集．其几何意义如图 1.3 中的阴影部分所示．

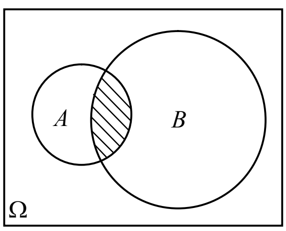

图 1.3　$A \cap B$

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A=\{2,3,4\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则积事件为

$$C=A\cap B=\{2\}，表示\{掷出的点数是 2 点\}.$$

类似地，也可以将积事件推广到有限多个与可列多个事件之积的情形：

（1）用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件；

（2）用 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件.

4. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这样的事件称为事件 A 与 B 的差事件，记作

$$A-B.$$

$A-B$ 是由所有属于 A 而不属于 B 的样本点组成，其几何意义如图 1.4 中的阴影部分所示．显然 $A-B=A\overline{B}$.

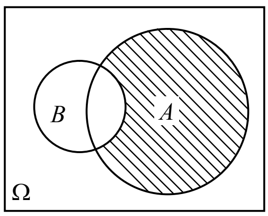

图 1.4　$A-B$

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A=\{2,3,4\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则差事件

$$A-B=\{3,4\}.$$

5. 事件互不相容

“事件 A 与事件 B 不能同时发生”，也就是说，AB 是一个不可能事件，即

$$AB=\varnothing,$$

此时称事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的）.

A 与 B 互不相容等价于它们没有相同的样本点，即没有公共的样本点．若用集合表示事件，则 A 与 B 互不相容即为 A 与 B 是不相交的，如图 1.5 所示.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容（或互斥）.

通常把两个互不相容的事件 A 与 B 的并记作

$$A+B.$$

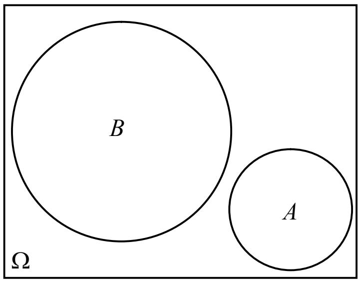

图 1.5　$AB=\varnothing$

把 n 个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \text{（简记为} \sum_{i=1}^{n} A_i \text{）}.$$

容易看出，在随机试验中，任何两个不同的基本事件都是互不相容的.

6. 对立事件（逆事件）

若 A 是一个事件，令 $\overline{A}=\Omega-A$ ，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，或称为事件 A 的逆事件.

也就是说，$\overline{A}$ 是由样本空间 Ω 中所有不属于 A 中的样本点构成的．如果把事件 A 看作集合，那么 $\overline{A}$ 就是 A 的补集．图 1.6 中的阴影部分表示 $\overline{A}$.

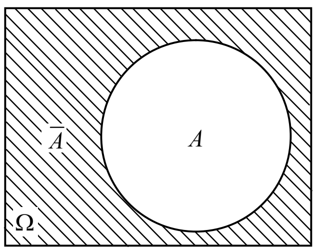

图 1.6　$\overline{A}$

显然，在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生，反之亦然； A 与 $\overline{A}$ 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与 $\overline{A}$ 满足关系

$$A\cap\overline{A}=\varnothing，\quad A+\overline{A}=\Omega .$$

必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是对立事件，同时又是互不相容事件.

注　若事件 A 、B 互为对立事件，则事件 A 、B 必互不相容；但是，若事件 A 、B 互不相容，则事件 A 、 B 未必互为对立事件.

例如，在掷骰子试验中，若 $A=\{1,2\}$ ， $B=\{3,5\}$ ，则 A 与 B 互不相容．但是，事件 B 不是 A 的对立事件， A 的对立事件 $\overline{A}=\{3,4,5,6\}$.

7. 互不相容的完备事件组

将事件 A 与 $\overline{A}$ 的关系推广到 n 个事件的情形：

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，且任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个互不相容的完备事件组，又称为样本空间 Ω 的一个划分，几何解释见图 1.7.

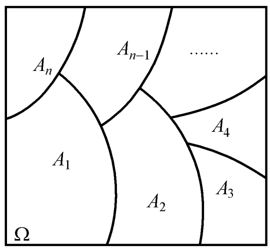

图 1.7　样本空间 Ω 的一个划分

例如，在掷骰子试验中，事件 $A = \{1, 2\}$，$B = \{3, 5\}$，$C = \{4, 6\}$ 构成一个互不相容的完备事件组.

五、事件运算法则

由事件关系与运算的定义可以看出，它们与集合的关系与运算是一致的．因此，集合的运算性质对事件的运算也都适用.

事件的运算法则有：

1．交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA. \tag{1.1.1}$$

2．结合律

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.1.2}$$
$$ABC = (AB)C = A(BC). \tag{1.1.3}$$

3．分配律

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C), \tag{1.1.4}$$
$$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC). \tag{1.1.5}$$

4．德 · 摩根定律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \tag{1.1.6}$$

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}. \tag{1.1.7}$$

例 5　甲、乙、丙三人各射一次靶，记 $A = \{$甲中靶$\}$，$B = \{$乙中靶$\}$，$C = \{$丙中靶$\}$，则用上述三个事件的运算，有下列各事件的表示如下：

（1）甲未中靶：　　　　　$\bar{A}$；

（2）甲中靶而乙未中靶：　$A\bar{B}$；

（3）三人中只有丙未中靶：　$AB\bar{C}$；

（4）三人中恰好有一人中靶：　$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

（5）三人中至少有一人中靶：　$A\cup B\cup C$；

（6）三人中至少有一人未中靶：　$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

（7）三人中恰有两人中靶：　$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$；

（8）三人中至少两人中靶：　$AB\cup AC\cup BC$；

（9）三人均未中靶：　$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

（10）三人中至多一人中靶：　$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

（11）三人中至多两人中靶：　$\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$．

注　上例中的（6）和（11）都是用不同方法表达同一事件，在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

1.2　随机事件的概率

我们观察一项随机试验所发生的各个结果，就其一次具体的试验而言，每一事件出现与否都带有很大的偶然性，似乎没有规律可言．但是在大量的重复试验后，就会发现：某些事件发生的可能性大些，另外一些事件发生的可能性小些，而有些事件发生的可能性大致相同．例如，一个箱子中装有 100 件产品，其中 95 件是合格品，5 件是次品．从其中任意取出一件，则取到合格品的可能性就比取到次品的可能性大．假如这 100 件产品中的合格品与次品都是 50 件，则取到合格品与取到次品的可能性就应该相同．所以，一个事件发生的可能性大小是它本身所固有的一种客观的度量．自然人们希望用一个数来描述事件发生的可能性大小，而且事件发生的可能性大，这个数就大；事件发生的可能性小，这个数就小.

为此，首先引入“频率”的概念，它描述了事件在相同条件下重复多次试验所发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数量指标——概率.

一、频率

定义 1　在相同的条件下，进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**；比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$．

显然，频率具有下列性质：

性质 1　非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

性质 2　规范性：设 Ω 为必然事件，则 $f_n(\Omega)=1$.

性质 3　可加性：若事件 A 、B 互不相容，则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) .$$

例 1 在相同条件下，多次抛一枚质地均匀的硬币，考察“正面朝上”的次数.这个试验在历史上曾经有多人做过，得到如表 1.1 所示的数据.

表 1.1 投掷硬币试验数据

实验者	投掷次数 n	出现正面次数 n_A（频数）	频率 $\frac{n_A}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

在例 1 中，可见“正面朝上”的频率在 0.5 附近摆动，当 n 增大时，逐渐稳定于 0.5.

经验表明：虽然在 n 次试验中，事件 A 出现的次数 n_A 不确定，因而事件 A 的频率 $\frac{n_A}{n}$ 也不确定，但是当试验重复多次时，事件 A 出现的频率具有一定的稳定性. 这就是说，当试验次数充分大时，事件 A 出现的频率在一个常数附近摆动. 这种频率的稳定性，说明随机事件发生的可能性大小是事件本身固有的，用这个常数来表示事件 A 发生的可能性大小比较恰当. 这是我们下面给出概率的统计定义的客观基础.

二、概率的统计定义

定义 2 在试验条件不变的情况下，重复做 n 次试验，当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定到某一常数 p，则称这个常数 p 为事件 A 在一次试验中发生的**概率**，记作 $P(A)$，即

$$P(A) = p .$$

数 $P(A)$ 是在一次试验中事件 A 发生的可能性大小的一种数量描述. 我们称定义 2 是**概率的统计定义**. 例如，在例 1 中用 0.5 来描述掷一枚匀质硬币“正面朝上”出现的可能性大小.

三、概率的性质

由概率的公理化定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质 1 对于任意事件 A，都有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 . \qquad (1.2.1)$$

性质 2 $P(\Omega) = 1$，$P(\varnothing) = 0$. （1.2.2）

性质 3 （有限可加性）对于两两互不相容的 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2.3}$$

特别地，对于互不相容事件 A 、 B ，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2.4}$$

性质 4 （概率减法公式）设 A 、 B 为任意两个事件，则有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB). \tag{1.2.5}$$

特别地，若事件 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.2.6}$$

性质 5 （对立事件的概率）设 $\overline{A}$ 是随机事件 A 的对立事件，则有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.2.7}$$

证 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，由规范性和有限可加性得到

$$1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

即得

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

特别地，
$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})\\&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}).\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

性质 6 （概率一般加法公式）对于任意的事件 A 、 B ，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.9}$$

推广：设 A_1, A_2, A_3 是三个事件，则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&\ P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3),\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

如图 1.8 所示。

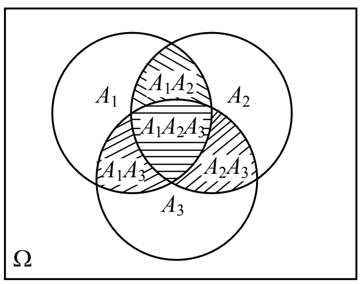

图 1.8 三个事件和的概率公式

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

例 2 已知 $P(\overline{A})=0.5$， $P(\overline{A}B)=0.2$， $P(B)=0.4$，求

（1）$P(AB)$；（2）$P(A-B)$；（3）$P(A\cup B)$；（4）$P(\overline{A}\overline{B})$.

解　（1）因为 $AB+\overline{A}B=B$，且 AB 与 $\overline{A}B$ 是不相容的，故有 $P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)$，于是 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2$；

（2）$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$，

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$；

（3）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$；

（4）$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

例 3　某乳业公司向一小区提供两种乳品：纯牛奶和酸奶. 经调查，小区内住户订纯牛奶的有 45%，订酸奶的有 35%，两种都订的有 10%. 现从小区内任选一住户，求：

（1）此住户至少订一种奶品的概率；

（2）此住户只订一种奶品的概率.

解　设 $A=\{$订纯牛奶$\}$，$B=\{$订酸奶$\}$，则 $A\cup B=\{$至少订一种奶品$\}$.

（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.45+0.35-0.1=0.7$；

（2）$A\overline{B}+\overline{A}B=\{$只订一种奶品$\}$，$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\cup B)-P(AB)=0.7-0.1=0.6$.

1.3　古 典 概 率

在古代，人们利用研究对象的物理或几何性质所具有的对称性确定了计算概率的一种方法.

例如，在抛掷硬币试验中，令 ω_1 表示“出现正面”，ω_2 表示“出现反面”，则样本空间 Ω 中两个基本事件 $\{\omega_1\}$ 和 $\{\omega_2\}$ 发生的可能性是相等的，因而可以规定

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\frac{1}{2}.$$

即“出现正面”和“出现反面”的概率各占一半.

下面给出古典概型的定义及其概率计算公式.

一、古典概型及其概率计算

定义 1　如果随机试验 E 满足下述条件：

（1）有限性：试验所含的基本事件个数是有限个，即样本空间的样本点只有有限个；

（2）等可能性：每个基本事件发生的可能性是相同的.

则称这个试验为**古典概型**，又称为**等可能概型**.

定理　在古典概型中，任一随机事件 A 所包含的基本事件数 m 与样本空间 Ω 所包含的基本事件总数 n 的比值，称为随机事件 A 的概率，即

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \qquad (1.3.1)$$

上式就是古典概型中事件 A 的概率计算公式.

注 计算古典概型概率时，首先要判断“有限性”和“等可能性”是否满足.“有限性”较容易看出，“等可能性”需要根据实际问题来判定. 其次要弄清楚样本空间是怎样构成的，从而求出基本事件的总数 n，同时求出所讨论事件 A 包含的基本事件数 m，然后利用古典概率计算公式求得 $P(A)$.

例 1 设盒中有 3 个白球，2 个红球，现从盒中任意抽取 2 个球，求取到一个红球和一个白球的概率.

解 设 $A=\{$取到一红一白$\}$.

从盒中任抽 2 个球共有 C_5^2 种不同抽法，即试验所含的基本事件总数是 C_5^2 个，事件 A 包含的基本事件数是 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1$ 个. 所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_5^2}=\frac{3}{5}=0.6.$$

即取到一红一白的概率为 0.6.

一般地，设盒中有 N 个球，其中有 M 个白球，现从中任取 n $(n\leqslant N)$ 个球（不放回），则这 n 个球中恰有 m $(m\leqslant M)$ 个白球的概率是

$$p=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}.$$

例 2 已知 10 件产品中有 7 件正品，3 件次品.

（1）不放回地每次从中任取一件，共取 3 次，求取到 3 件次品的概率；

（2）每次从中任取一件，有放回地取 3 次，求取到 3 件次品的概率；

（3）从中任取三件，求至少取到 1 件次品的概率.

解 （1）设 $A=\{$取到 3 件次品$\}$.

由于此试验是不放回抽取 3 次，所以 3 次取产品分别是从 10 件、9 件、8 件中任取一件，共有 $10\times9\times8=720$ 种不同的取法，而 3 次取到 3 件次品共有 $3\times2\times1=6$ 种不同取法，所以

$$P(A)=\frac{6}{720}=\frac{1}{120}\approx0.0083.$$

（2）设 $B=\{$取到 3 件次品$\}$.

由于此试验是有放回抽取 3 次，所以 3 次取产品分别都是从 10 件中任取一件，共有 $10\times10\times10=1000$ 种不同取法，而 3 次取到 3 件次品共有 $3\times3\times3=27$ 种不同取法，于是

$$P(B)=\frac{27}{1000}\approx0.027.$$

（3）设 $C=\{$至少取到 1 件次品$\}$，则 $\overline{C}=\{$取到 3 件正品$\}$.

样本空间中样本点的个数为C_{10}^{3}，事件$\bar{C}$包含的样本点个数为C_{7}^{3}，于是

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{\mathrm{C}_{7}^{3}}{\mathrm{C}_{10}^{3}}=\frac{17}{24}\approx 0.708 .$$

例 3　将 3 个球随机的放入 3 个盒子中，问：

（1）每盒恰有一球的概率？

（2）空一盒的概率？

解　设$A=\{$每盒恰有一球$\}$，$B=\{$空一盒$\}$.

3 个球随机的放入 3 个盒子中共有3^3种不同的放法，即试验所含的基本事件总数是3^3个.

（1）事件A包含的基本事件个数是$3!$个，所以

$$P(A)=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9} .$$

（2）**方法 1**

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2}{3^3}=\frac{2}{3} .$$

分析：$B=\{$空一盒$\}$等价于 3 个盒子中有一个空的，剩下两个盒子，其中一个放入两个球，剩下一球放入第三个盒子.

方法 2

$$P(B)=1-P\{\text{空两盒}\}-P\{\text{全有球}\}=1-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{3} .$$

例 4　（抽签的公平性）盒中有a个红球，b个白球，把球随机地一只只取出（不放回），求事件A“第k $(0<k\leqslant a+b)$次取到红球”的概率.

解　**方法 1**　把$a+b$个球编上 1 至$a+b$号，将球一只一只取出后排成一排，考虑到取球的先后顺序，因此共有$(a+b)\,!$种取法，由球的均匀性知每种取法机会都相同，故属于古典概型，A发生可以先从a个红球中任取一个放在第k个位置上，然后将剩下的$a+b-1$个球随意排在另外$a+b-1$个位置上，共有$\mathrm{C}_a^1(a+b-1)!$种排法，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b} .$$

方法 2　只考虑第k次取球，每个球仍然编有不同的号码，由于每个球都有相同的机会被放在第k个位置上，$a+b$个不同的球，总共有$a+b$种放法，按古典概型，A发生必须是a个红球中的一个放在第k个位置上，即A发生的放法有a种，故

$$P(A)=\frac{a}{a+b} .$$

此问题有多种不同的考虑方式，当然结果都相同，第k次取到红球的概率与k无关.

此例说明传统的抽签的结果与先后顺序无关.

二、几何概率

在概率论的发展初期，人们就认识到，仅假定样本空间为有限样本空间是不够的，有时需要处理有无穷多个样本点的情形．我们先看下面两个例子．

例 5 在区间$[0,1]$上随机地任意产生一个数x，求x不大于$\frac{1}{3}$的概率．

例 6 随机地在单位圆域内任掷一点M，求点M到原点距离不大于$\frac{1}{2}$的概率．

以上两个例子都具有“等可能性”的特征．在前一例中，我们认为“随机数x在区间$[0,1]$上任何一处出现的机会均等”，只要x落入区间$[0,\frac{1}{3}]$内对应的事件就会发生，概率应该为区间$[0,\frac{1}{3}]$长度与区间$[0,1]$长度之比，即概率应该等于$\frac{1}{3}$；在后一例中，我们可认为“单位圆域内每一点被掷到的机会均等”，只要点M落入以原点为圆心，以$\frac{1}{2}$为半径的小圆内对应的事件就会发生，其概率应该为小圆面积与大圆面积之比$\dfrac{\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi\cdot 1^2}$，即概率为$\frac{1}{4}$．

描述这样一些随机试验的样本空间Ω，都是一个区间或区域，其样本点在区域Ω内具有“等可能分布”的特点．设区域$A\subset\Omega$，如果样本点落入A中，我们就说事件A发生了．这样可作以下定义．

定义 2 设样本空间Ω为一个有限区域，以$\mu(\Omega)$表示Ω的度量（一维为长度，二维为面积，三维为体积等）．$A\subset\Omega$是Ω中一个可以度量的子集，$\mu(A)$表示A的度量，定义

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1.3.2}$$

为事件A发生的概率，称其为**几何概率**．

例 7 某公共汽车站从上午 6 时起，每隔 15 分钟来一趟车，一乘客在 6:00 到 6:30 之间随机到达该车站，求：

（1）该乘客等候时间不超过 5 分钟乘上车的概率；

（2）该乘客等候时间超过 10 分钟才乘上车的概率．

解 用t表示该乘客的到达时间，且记问题（1）、（2）涉及事件为A、B，则

$\Omega=\{6:00<t<6:30\}$，

$A=\{6:10<t<6:15\}\cup\{6:25<t<6:30\}$，

$B=\{6:00<t<6:05\}\cup\{6:15<t<6:20\}$．

将t的单位记为分钟，则有$\mu(\Omega)=30$，$\mu(A)=10$，$\mu(B)=10$，因此

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}.$$

1.4 条件概率

一、条件概率与乘法公式

在自然界及人类的活动中，存在着许多互相联系、互相影响的事件．除了要分析随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 外，有时我们还要提出附加的限制条件，也就是要分析“在事件 B 已经发生的前提下事件 A 发生的概率”，记为 $P(A|B)$．这就是条件概率问题．

引例 某班有 30 名学生，其中 20 名男生，10 名女生；这 30 名学生中身高在 1.70 米以上的有 15 名，其中 12 名男生，3 名女生．

（1）任选一名学生，问该学生的身高在 1.70 米以上的概率；

（2）任选一名学生，选出来后发现是一位男生，问该同学的身高在 1.70 米以上的概率．

分析 设 $A=\{$任选一名学生，该学生身高在 1.70 米以上$\}$，

$B=\{$任选一名学生，该学生是男生$\}$．

可以看到，第一个问题求的是 $P(A)$，而第二个问题，是在“已知事件 B 发生”的附加条件下，求 A 发生的概率，即求的是 $P(A|B)$．于是有

$$P(A)=\frac{15}{30}=0.5，\quad P(A|B)=\frac{12}{20}=0.6.$$

并且容易看出
$$P(B)=\frac{20}{30}，\quad P(AB)=\frac{12}{30}，$$

从而
$$P(A|B)=\frac{12}{20}=\frac{12/30}{20/30}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由此可以给出条件概率的一般定义．

定义 1 设 A、B 是两个随机事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.4.1}$$

为在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率或 A 关于 B 的条件概率．

同理，当 $P(A)>0$ 时，也可类似地定义 B 关于 A 的条件概率．

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

由这个定义可知，对任意两个事件 A、B，有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)，\quad P(B)>0. \tag{1.4.2}$$

类似地有
$$P(AB)=P(A)P(B|A)，\quad P(A)>0. \tag{1.4.3}$$

称以上两式为**概率的乘法公式**.

概率的乘法公式可以推广到有限多个事件积的情形：

若 $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$，则

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2). \tag{1.4.4}$$

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.4.5}$$

例 1　同时抛掷两枚硬币，已知其中有一枚硬币是正面向上，问这时另一枚硬币也是正面向上的概率为多大？

解　由题意样本空间为

$\Omega = \{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，

$A = \{$有一枚正面向上$\}=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$，

$B = \{$两个都是正面$\}=\{$(正，正)$\}$.

于是所求概率为

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

也可以把 A 理解为一个样本空间，B 为样本空间 A 中的一个事件，显然，$P(B) = \dfrac{1}{3}$.

例 2　为了防止意外，在矿内同时设有甲、乙两种报警系统，每种系统单独使用时，其有效的概率：系统甲为 0.92，系统乙为 0.93．甲乙两系统同时使用时都有效的概率为 0.862，求

（1）这两个报警系统至少有一个有效的概率；

（2）系统乙有效的条件下，系统甲也有效的概率；

（3）系统甲有效的条件下，系统乙也有效的概率.

解　设 $A=\{$系统甲有效$\}$，$B=\{$系统乙有效$\}$.

则 $$P(A) = 0.92，\quad P(B) = 0.93，\quad P(AB) = 0.862.$$

（1）这两个报警系统至少有一个有效的概率为：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988；$$

（2）系统乙有效的条件下，系统甲也有效的概率为：

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.862}{0.93} = 0.927；$$

（3）系统甲有效的条件下，系统乙也有效的概率为：

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.862}{0.92} = 0.937.$$

例 3　一批零件共 100 个，次品率为 10%，每次从其中任取一个零件，取出的零件不放回，求第三次才取得合格品的概率.

解 设事件 A_i 表示“第 i 次取得合格品”，$i=1,2,3$．所求事件为 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\left|\overline{A}_1\right.)P(A_3\left|\overline{A}_1\overline{A}_2\right.)$$

$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}\approx 0.0083\,.$$

二、全概率公式和贝叶斯公式

为了计算比较复杂的事件的概率，人们经常把复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和，通过分别计算这些简单事件的概率，再应用概率的加法公式与乘法公式求得所需结果.

定理 1　全概率公式

设 Ω 为一样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，即

$$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)\text{；}\quad A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega\,.$$

且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\left|A_i\right.)\,. \tag{1.4.6}$$

证明

$$B=B\cap\Omega=B\cap(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

$$=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n\,.$$

由于　$BA_1,BA_2,\cdots,BA_n$ 两两互斥，所以有

$$P(B)=P(BA_1+BA_2+\cdots+BA_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)\,.$$

例 4　设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表．其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份．随机取出一个地区的报名表，从中任抽一份，求取出的是女生表的概率.

解　设 $B=\{$取出的是女生表$\}$，$A_i=\{$取出的是第 i 个地区的报名表$\}$ $(i=1,2,3)$，则

$$P(A_i)=\frac{1}{3}\ (i=1,2,3)\,.$$

$$P(B\left|A_1\right.)=\frac{3}{10}\text{，}\quad P(B\left|A_2\right.)=\frac{7}{15}\text{，}\quad P(B\left|A_3\right.)=\frac{5}{25}\,.$$

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}\approx 0.32\,.$$

例 5　某种仪器由 3 个部件组装而成．假设各部件质量互不影响且它们的优质品率分别为 0.8、0.7 与 0.9．已知如果三个部件都是优质品，则组装后的仪器一定合格；如果有一个部件不是优质品，则组装后的仪器合格率为 0.8；如果有两个部

件不是优质品，则组装后的仪器合格率为 0.4；如果三个部件都不是优质品，则组装后的仪器合格率为 0.1．试求仪器的合格率.

解 设 $A_i=\{$恰有 i 个部件是优质品$\}\ (i=0,1,2,3)$，

$$C_i=\{\text{第}\,i\,\text{个部件是优质品}\}\ (i=1,2,3)\text{，}\quad B=\{\text{仪器合格}\}.\ \text{则}$$

$$A_0=\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3\text{，}\quad A_1=C_1\overline{C}_2\overline{C}_3+\overline{C}_1C_2\overline{C}_3+\overline{C}_1\overline{C}_2C_3\text{，}$$

$$A_2=C_1C_2\overline{C}_3+C_1\overline{C}_2C_3+\overline{C}_1C_2C_3\text{，}\quad A_3=C_1C_2C_3.$$

$$P(C_1)=0.8\text{，}\quad P(C_2)=0.7\text{，}\quad P(C_3)=0.9.$$

计算得

$$P(A_0)=0.006\text{，}\quad P(A_1)=0.092\text{，}\quad P(A_2)=0.398\text{，}\quad P(A_3)=0.504.$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=0.006\times0.1+0.092\times0.4+0.398\times0.8+0.504\times1=0.8598.\end{aligned}$$

全概率公式给出了我们一个计算受到多个影响关系的事件概率的公式：假设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分，并且已知事件 A_i 的概率 $P(A_i)$（它们是试验前的已知概率，称为先验概率）及事件 B 在 A_i 已发生的条件下的条件概率 $P(B|A_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$，则由全概率公式就可算出 $P(B)$．现在的问题是：我们进行了一次试验，如果事件 B 确实发生了，则对于事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的概率应给予重新估计，也就是要计算事件 A_i 在事件 B 已发生的条件下的条件概率 $P(A_i|B)$（它们是试验后的事件概率，常称为后验概率）．下面的贝叶斯公式就给出了计算后验概率 $P(A_i|B)$ 的公式.

定理 2 贝叶斯（Bayes）公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(B)>0$，$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{aligned}P(A_i|B)&=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}\\&=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\ (i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

称上式为**贝叶斯（Bayes）公式**，也称为**逆概率公式**.

例 6 试卷中有一道选择题，共有 4 个答案可供选择，其中只有一个答案是正确的．考生如果会解这道题，则一定能选出正确答案；如果他不会解这道题，则任选一个答案．设考生会解这道题的概率是 0.8，求

（1）考生选出正确答案的概率；

（2）已知该考生所选答案是正确的，则他确实会解这道题的概率.

解 设 $B=\{$考生选出正确答案$\}$，$A=\{$考生会解这道题$\}$.

（1）$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$$=0.8\times1+0.2\times0.25=0.85\,.$$

（2）$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

$$=\frac{0.8\times1}{0.85}\approx0.941\,.$$

例 7 某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线分别占总产量的 15%、20%、30%和 35%，又知这四条流水线的不合格率依次为 0.05、0.04、0.03 和 0.02．现在从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率为多少？若该厂规定，出了不合格品要追究有关流水线的经济责任，现在在出厂产品中任取一件，结果为不合格品，但标志已脱落．问第四条流水线应承担多大责任？

解 令 $B=$｛任取一件，恰好抽到不合格品｝，

$A_i=$｛任取一件，恰好抽到第 i 条流水线的产品｝$(i=1,2,\cdots,n)$．

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02\\&=0.0315=3.15\%\,.\end{aligned}$$

$$P(A_4\mid B)=\frac{P(A_4)P(B\mid A_4)}{P(B)}=\frac{0.35\times0.02}{0.0315}=\frac{14}{63}\approx0.22\,.$$

即第四条流水线应承担 22%的责任．

1.5 事件的独立性

引例 一袋中装有 10 只产品，其中 3 只是次品，其余为合格品．从中任取两次，每次取一只．设 $A=$｛第一次取到次品｝，$B=$｛第二次取到次品｝，求 $P(B|A)$ 及 $P(B)$．

解 （1）若是不放回抽样，由题意易知

$$P(B|A)=\frac{2}{9}\,.$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}\,.$$

可见 $P(B|A)\neq P(B)$．

这说明事件 A 的发生与否对事件 B 发生的概率是有影响的．

（2）若是有放回抽样，由题意得到 $P(B|A)=\dfrac{3}{10}$，$P(B)=\dfrac{3}{10}$．

可见 $P(B|A)=P(B)$.

这说明事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率，这时称事件 A 与 B 是相互独立的.

由概率乘法公式知，如果 $P(B|A)=P(B)$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

定义 1　对任意的两个事件 A、B，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A、B **相互独立**.

定理 1　若事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(A|B)=P(A),\quad P(B|A)=P(B).$$

定理 2　若事件 A 与 B 独立，则下列各对事件：A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都是相互独立的.

证　由于 A 与 B 相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$. 因此有

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

因此，A 与 $\overline{B}$ 相互独立. 关于 $\overline{A}$ 与 B 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的独立性同理可证.

定理 2 还可叙述为：若四对事件 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立，即这四对事件或者都相互独立，或者都不相互独立.

事件的独立性概念，可以推广到三个和三个以上的事件的情形.

定义 2　对任意三个事件 A、B、C，如果有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(CA)=P(C)P(A)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

四个等式同时成立，则称事件 A、B、C **相互独立**.

定义 3　若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足对于任意的 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意的一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 都有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

注　（1）如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 k 个事件也相互独立 $(1<k\leqslant n)$.

（2）如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),\quad P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i}).\tag{1.5.1}$$

在实际应用中，对于事件的独立性，常常不是根据定义来判断，而是根据一事件的发生是否影响另一事件的发生来判断.

例 1 一工人看管三台机床，在一小时内甲、乙、丙三台机床需该工人照看的概率分别为 0.9、0.8 和 0.85．求：在一小时中

（1）没有机床需要照看的概率；

（2）至少有一台机床不需要照看的概率；

（3）至多有一台机床需要照看的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 台机床需要照看$\}\ (i=1,2,3)$，$A=\{$没有一台机床需要照看$\}$，

$B=\{$至少有一台机床不需要照看$\}$，$C=\{$至多有一台机床需要照看$\}$.

由于 A_1,A_2,A_3 相互独立，因此 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 也相互独立.

（1）$$P(A)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$
$$=(1-0.9)(1-0.8)(1-0.85)=0.003.$$

（2）$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388.$$

（3）$$P(C)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.003+0.9\times0.2\times0.15+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85$$
$$=0.059.$$

例 2 假若每个人的血清中含有某病毒的概率为 0.004，混合 100 个人的血清，求此血清中含有此病毒的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 个人的血清中含有此病毒$\}\ (i=1,2,\cdots,100)$.

则 $P(A_i)=0.004$，$P(\overline{A_i})=0.996\ (i=1,2,\cdots,100)$.

可以认为 $A_1,A_2,\cdots,A_{100}$ 是相互独立的.

$$P(\bigcup_{i=1}^{100}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{100}\overline{A_i})=1-\prod_{i=1}^{100}P(\overline{A_i})=1-0.996^{100}\approx0.33.$$

1.6 独立试验序列

假设试验 E 只有两种可能的结果：A 及 $\overline{A}$，在相同的条件下将试验 E 重复进行 n 次，若各次试验的结果互不影响，则称这 n 次试验是 ***n* 重独立试验序列**（也称为**伯努利概型**）.

对于 n 重独立试验序列，我们主要研究 n 次试验中，事件 A 发生 m 次的概率：$P_n(m)$.

定理 如果在独立试验序列中，每次试验只有两种可能的结果：A 及 $\overline{A}$，并且

$$P(A)=p，\quad P(\overline{A})=1-p=q\ （其中 0<p<1），$$

则在 n 次试验中事件 A 发生 m 次的概率为

$$P_n(m)=\mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}, \quad 0\leqslant m\leqslant n . \tag{1.6.1}$$

例 1　某射手每次射击击中目标的概率为 0.8，现在进行 20 次独立射击．求

（1）恰有 15 次击中目标的概率；

（2）击中目标的次数不超过 18 次的概率．

解　（1）20 次独立射击中恰有 15 次击中目标的概率是

$$P_{20}(15)=\mathrm{C}_{20}^{15}\times 0.8^{15}\times 0.2^5\approx 0.175 ;$$

（2）击中目标的次数不超过 18 次的概率

$$\begin{aligned}P(m\leqslant 18)&=1-P_{20}(19)-P_{20}(20)\\&=1-\mathrm{C}_{20}^{19}\times 0.8^{19}\times 0.2^1-0.8^{20}\approx 0.93 .\end{aligned}$$

例 2　某种疾病的自然痊愈率为 0.1，为了检验一种治疗该病的新药是否有效，将它给患该病的 10 位志愿者服用，按约定：如果 10 名受试者中至少有 3 人痊愈就认为该药有效，否则认为完全无效．按此约定，求新药实际上完全无效但被确定为有效的概率．

解　设 $A=\{$新药完全无效但被确定为有效$\}$．

若新药完全无效，则痊愈者均为自然痊愈．

$$\begin{aligned}P(A)=P_{10}(k\geqslant 3)&=1-P_{10}(k=0)-P_{10}(k=1)-P_{10}(k=2)\\&=1-0.9^{10}-\mathrm{C}_{10}^1\times 0.9^9\times 0.1-\mathrm{C}_{10}^2\times 0.9^8\times 0.1^2\approx 0.07 .\end{aligned}$$

习题一

1.1　设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件．

（1）B,C 都发生，而 A 不发生；　　（2）A,B,C 中至少有一个发生；

（3）A,B,C 中恰有一个发生；　　（4）A,B,C 中恰有两个发生；

（5）A,B,C 中不多于一个发生；　　（6）A,B,C 中不多于两个发生．

1.2　某院校二年级学生第一学期开设 A 、B 两门选修课．已知学生选修 A 课程的有 45%，选修 B 课程的有 35% ，两门课程都选的有 10%．现从该校二年级任选一学生，求

（1）该生至少选修一门课程的概率；

（2）该生只选修一门课程的概率．

1.3　将一枚匀称的骰子抛掷两次，求两次出现的点数之和等于 8 的概率．

1.4　在 1～100 共一百个数中任取一个数，求这个数能被 2 或 3 或 5 整除的概率．

1.5　从装有 3 只红球、2 只白球的盒子中任意取出两只球，求其中有并且只有一只红球的概率．

1.6　把 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书放在一起的概率．

1.7　为了减少比赛场次，把 20 个球队任意分成两组，每组 10 队进行比赛，求最强的两个队被分在不同组内的概率．

1.8　某产品有大、中、小三种型号．某公司发出 17 件此产品，其中 10 件大号，4 件中号，3 件小号．交货人粗心随意将这些产品发给顾客．问一个订货为 4 件大号、3 件中号和 2 件小号的顾客，能按所定型号如数得到订货的概率是多少？

1.9　从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件，求

（1）其中恰有 1 件次品的概率．

（2）至少有 1 件次品的概率．

1.10　将 3 个球随机地投入 4 个盒子中，求下列事件的概率

（1）A－任意 3 个盒子中各有一球；

（2）B－任意一个盒子中有 3 个球；

（3）C－任意 1 个盒子中有 2 个球，其他任意 1 个盒子中有 1 个球．

1.11　一批产品共 20 件，其中一等品 9 件，二等品 7 件，三等品 4 件．从这批产品中任取 3 件，求

（1）取出的 3 件产品中恰有 2 件等级相同的概率；

（2）取出的 3 件产品中至少有 2 件等级相同的概率．

1.12　盒中有 12 颗围棋子，其中 8 颗白子，4 颗黑子．现从中任取 3 颗．求

（1）取到的都是白子的概率；

（2）取到两颗白子，一颗黑子的概率；

（3）取到的三颗棋子中至少有一颗黑子的概率；

（4）取到的三颗棋子颜色都相同的概率．

1.13　猎人在距离 100 米处射击一动物，击中的概率为 0.6；如果第一次未击中，则进行第二次射击，但由于动物逃跑而使距离便成为 150 米；如果第二次又未击中，则进行第三次射击，这时距离变为 200 米．假定最多进行三次射击，设击中的概率与距离成反比，求猎人击中动物的概率．

1.14　100 个零件中，有 10 个次品，每次无放回的任取一个，规定如果取得一个合格品，就不再继续取零件．求三次内取得合格品的概率．

1.15　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件．已知两件中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率．

1.16　设某电台每到整点均报时．一人早上醒来后打开收音机．求他等待时间不超过 10 分钟就能听到该电台报时的概率．

1.17　设某种动物由出生算起活到 20 岁以上的概率为 0.8，活到 25 岁以上的概率为 0.4．如果一只动物现在已经活到 20 岁，问它能活到 25 岁以上的概率．

1.18　据多年来的气象记录知甲、乙两城市在一年内的雨天分布是均等的，且雨天的比例甲市占 20%，乙市占 18%，两市同时下雨占 12%．求

（1）某一天两市中至少有一市下雨的概率；

（2）乙市下雨的条件下，甲市也下雨的概率；

（3）甲市下雨的条件下，乙市也下雨的概率.

1.19 假定在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率的变化. 经分析，该时期内利率不会上涨，利率下调的概率为 60%，利率不变的概率为 40%. 根据经验，在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%，在利率不变时，这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

1.20 一人从外地到济南参加会议，他乘火车的概率为 0.5，乘飞机的概率为 0.3，乘汽车的概率为 0.2. 如果乘火车来，迟到的概率为 0.25，乘飞机来迟到的概率为 0.12，乘汽车来迟到的概率为 0.08. 求此人迟到的概率.

1.21 盒中放有 12 个乒乓球，其中 9 个是新的. 第一次比赛时从中任取 3 个来用，赛后放回，第二次比赛时再从中任取 3 个. 求第二次比赛时取出的球都是新球的概率.

1.22 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只. 假设各箱含 0、1、2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员任取一箱，而顾客随机的察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退还. 试求顾客买下该箱的概率.

1.23 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4、0.5、0.7. 飞机被一人击中而击落的概率为 0.2，被两人击中而击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率.

1.24 某厂甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，其产量分别占全厂总产量的 40%、38%、22%，经检验知各车间的次品率分别为 0.04、0.03、0.05. 现从该种产品中任意取一件进行检查

（1）求这件产品是次品的概率；

（2）已知抽得的一件是次品，问此次品来自甲、乙、丙各车间的概率分别是多少？

1.25 假定根据某种化验指标诊断肝炎，根据以往记录：$P(A|C)=0.95$，$P(\overline{A}|\overline{C})=0.97$. 其中 A 表示事件“化验结果为阳性”，C 表示事件“被查者患有肝炎”. 又根据资料知该地区肝炎患者占 0.004，即 $P(C)=0.004$. 现有此地区一人化验结果为阳性，求此人确实患有肝炎的概率.

1.26 某人有一串 m 把外形相同的钥匙，其中只有一把能打开家门. 有一天该人酒醉后回家，下意识地每次从 m 把钥匙中随便拿一只去开门，问该人在第 k 次才把门打开的概率.

1.27 甲、乙两射手在相同条件下进行射击，他们击中目标的概率分别是 0.9 和 0.8. 如果两个射手同时独立各射击一次，问目标被击中的概率.

1.28 加工某一零件共需四道工序，设第一、二、三、四道工序出次品的概率分别为 0.02、0.03、0.05、0.04，且各道工序互不影响，求加工出的零件的次品率.

1.29 设某种药物对某种疾病的治愈率为 80%，现有 10 名患有这种疾病的病

人同时服用这种药，求其中至少有 6 人被治愈的概率.

1.30　8 门炮同时向某一目标各射一发子弹，有不少于 2 发炮弹命中时，目标被击毁. 如果每门炮击中目标的概率为 0.6，求摧毁目标的概率.

1.31　设某型号的高射炮，每门炮发射一发炮弹击中飞机的概率为 0.6. 现配置若干门炮独立地各发射一发炮弹，问欲以 99%的把握击中来犯的一架敌机，至少需配置几门高射炮？

1.32　射击运动中，一次射击最多能得 10 环. 设某运动员在一次射击中得 10 环的概率为 0.4，得 9 环的概率为 0.3，得 8 环的概率为 0.2，求该运动员在五次独立的射击中得到不少于 48 环的概率.

1.33　金工车间有 10 台同类型的机床，每台机床配备的电动机功率为 10 千瓦，已知每台机床工作时，平均每小时实际开动 12 分钟，且开动与否是相互独立的. 现因当地电力供应紧张，供电部门只提供 50 千瓦的电力给这 10 台机床，问这 10 台机床能够正常工作的概率.

1.34　某大学的学生排球队与教工排球队进行比赛. 已知每一局学生排球队获胜的概率为 0.6，教工排球队获胜的概率为 0.4. 求

（1）采用三局两胜制时，学生排球队获胜的概率；

（2）采用五局三胜制时，学生排球队获胜的概率.

1.35　假定一厂家生产的每台仪器以概率 0.70 可以直接出厂，以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现在该厂生产了 $n(n \geqslant 2)$ 台仪器（假定各台仪器的生产过程相互独立）. 求

（1）n 台全部能出厂的概率 α；

（2）其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

（3）其中至少有两台不能出厂的概率 θ.