第 4 章　不定积分

不定积分是导数运算的逆运算，它是积分学的基本问题．本章主要介绍不定积分的概念、性质，以及计算不定积分的一些基本方法．

§4.1　原函数与不定积分

4.1.1　原函数的概念

在第 2 章我们已经知道，已知变速直线运动的规律 $s=s(t)$，求瞬时速度 $v(t)$，实际上就是求函数 $s=s(t)$ 的导数，即 $v(t)=s'(t)$．反过来，如果已知变速直线运动的瞬时速度 $v=v(t)$，求它的运动规律 $s(t)$，这类问题实际上就是导数运算的逆运算，即已知一个函数的导数，求“原来的”函数，这就形成了原函数问题．下面我们给出原函数的概念．

定义 4-1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个函数 $F(x)$，使得对于任何一个 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**．

例如，对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的每一个点 x，有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x$，这时我们称函数 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数；又如，$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$，故在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，函数 $\ln|x|$ 就是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数．那么什么情况下的函数具有原函数？若原函数存在，它又如何表示呢？

定理 4-1　（原函数存在定理）　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则必存在可导函数 $F(x)$，使得 $\forall x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$，即连续函数一定有原函数．

该定理的证明将在第 5 章给出．

我们有如下结论：

（1）初等函数在定义区间上连续，所以初等函数在定义区间上都有原函数；

（2）若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数，即 $f(x)$ 有无限多个原函数；

（3）若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $f(x)$ 的其他原函数都可以表示为 $F(x)+C$（C 为任意常数）．

注意：前两个结论是显然的．对于结论（3），只要能证明：若 $\Phi(x)$ 也是 $f(x)$ 的某一个原函数，则一定存在常数 C_0，使得 $\Phi(x)=F(x)+C_0$．

事实上，$\forall x\in I$，因为$\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$，所以有

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=0\,.$$

由第 3 章拉格朗日中值定理的推论可知，$\Phi(x)-F(x)$在区间I上恒为常数. 我们取某一点$x_0\in I$，并令$C_0=\Phi(x_0)-f(x_0)$，则$\forall x\in I$，有

$$\Phi(x)-F(x)=\Phi(x_0)-F(x_0)=C_0\,,$$

即

$$\Phi(x)=F(x)+C_0\,.$$

结论（2）和结论（3）说明：若$F(x)$是$f(x)$的某个原函数，则$f(x)$的原函数全体可以统一表示成$F(x)+C$的形式（这里的C为任意常数）.

4.1.2 不定积分的概念

定义 4-2 函数$f(x)$在区间I上的全体原函数称为$f(x)$在I上的**不定积分**，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

其中$\int$为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**，x称为**积分变量**.

由前面的结论知：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\,.$$

其中$F(x)$是$f(x)$的某个原函数，C称为**积分常数**.

注意：由定义知，求函数$f(x)$的不定积分，就是求$f(x)$的全体原函数，求不定积分的运算实际上就是求导数运算的逆运算. 在不会引起混淆的情况下，我们有时也把不定积分或求不定积分的运算简称为积分.

显然，如果要求不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$，只要先求出$f(x)$的一个原函数$F(x)$，然后再加上任意常数C就行了.

例 4-1 求$\int x^2\mathrm{d}x$.

解 因为$(\frac{1}{3}x^3)'=x^2$，所以$\frac{1}{3}x^3$是x^2的一个原函数，故

$$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C\,.$$

例 4-2 求$\int \sin x\mathrm{d}x$.

解 因为$(-\cos x)'=\sin x$，所以$(-\cos x)$是$\sin x$的一个原函数，故

$$\int \sin x=-\cos x+C\,.$$

我们把函数$f(x)$的原函数的图形称为积分曲线，由于不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$表示

的是 $f(x)$ 的全体原函数，所以从几何角度来看，它就代表着一族曲线，我们通常称这族曲线为函数 $f(x)$ 的**积分曲线族**，其中任何一条积分曲线都可以由某一条积分曲线沿 y 轴方向向上或向下平移适当的位置而得到．另外，在积分曲线族上，横坐标相同的点（比如 x_0 ）作切线，这些切线都是平行的（如图 4-1 所示），即它们的斜率都是相等的，均为函数 $f(x_0)$.

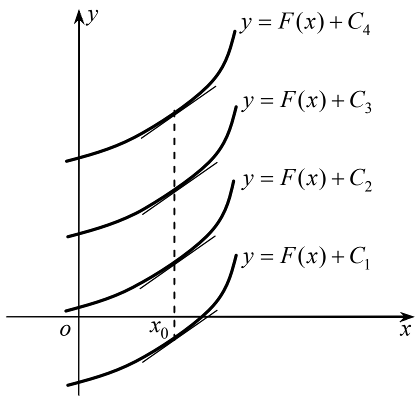

图 4-1

例 4-3　设某一曲线通过点 $(0,1)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的平方，求此曲线方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$ ，按题意有

$$y'(x)=x^2,$$

于是

$$y(x)=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C.$$

因为此曲线通过点 $(0,1)$ ，代入上式可得 $C=1$ ．故所求曲线的方程为

$$y=\frac{x^3}{3}+1.$$

从不定积分的定义可知它和导数、微分之间的关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x),\quad \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x.$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

记作

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

可见，积分运算以记号 $\int$ 表示，微分运算以记号 d 表示，当 $\int$ 和 d 连在一起

时，或者抵消，或者抵消后差一个常数.

4.1.3　不定积分的性质

根据不定积分的定义，容易得到如下性质：

定理 4-2　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上有原函数，则 $kf(x)$（$k\neq 0$ 为常数）和 $f(x)\pm g(x)$ 在 I 上也有原函数，且

（1）$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$，

（2）$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

由上述定理，我们很容易将其推广到有限多个函数的线性组合的情形，即：

$$\int [c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)]\mathrm{d}x=c_1\int f_1(x)\mathrm{d}x+c_2\int f_2(x)\mathrm{d}x+\ldots+c_n\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

其中 c_i（$i=1,2,\cdots n$）为常数.

4.1.4　不定积分的基本积分表

由于不定积分运算是导数运算的逆运算，所以，把导数的基本公式反过来就得出不定积分的基本公式，列表如下：

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 为常数），

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq -1$），

（3）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$，

（4）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$，

（5）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$，

（6）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$，

（7）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，

（8）$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$，

（9）$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$，

（10）$\int \sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，

（11）$\int \csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$，

（12）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$， （13）$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.

基本积分公式是求积分运算的基础，读者一定要熟记．同时，设u是以x为自变量的函数，把以上公式中的x换成u仍然成立．

4.1.5 直接积分法

不定积分的计算具有较强的方法性和技巧性，有些不定积分可以先通过简单的恒等变形，然后直接利用上面给出的不定积分性质和基本积分公式来求解，这种方法称为直接积分法．下面我们给出几个运用**直接积分法**的例子．

例 4-4 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$；

（3）$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$；　　（4）$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$；

（5）$\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　　（6）$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$．

解 （1）原式$=\int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x - 2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \sqrt{x}\left(2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}x^2\right)+C.$$

（2）原式$=\int \frac{(x^4-1)+2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(x^2-1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C$．

（3）原式$=\int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C$．

（4）原式$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x + \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x - \cot x + C$．

（5）原式$=\int \frac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x + C$．

（6）原式$=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - \sec x\tan x)\mathrm{d}x$

$$= \tan x - \sec x + C.$$

必须指出，直接积分法只能解决少数简单的不定积分的计算问题，而许多不定积分的计算需要寻求其他方法，我们将在后面几节内容中陆续加以探讨．

习题 4.1

1. 填空题：

（1）$\int \mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) =$ ________；

（2）若 $f'(x)=2x$， $f(1)=2$，则 $f(x)=$________；

（3）$\int \frac{1}{x+1}\,dx=$________；

（4）若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int x^2 f(\ln x)dx=$________.

2. 选择题：

（1）下列函数中，（　　）是 $\cos x$ 的原函数；

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$　　C. $-\cos x$　　D. $\cos x$

（2）若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）；

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

（3）若 $\int f(x)dx=\frac{1}{x}+C$，则 $f(x)=$（　　）；

A. $\ln|x|$　　B. $\frac{1}{x}$　　C. $-\frac{1}{x^2}$　　D. $\frac{2}{x^3}$

（4）下列等式中（　　）不正确.

A. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$　　B. $\int f'(x)\,dx=f(x)$

C. $\int df(x)=f(x)+C$　　D. $\int dx=x+C$

3. 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{1}{x^2}dx$；　　（2）$\int x\sqrt{x}dx$；

（3）$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$；　　（4）$\int x^2\sqrt[3]{x}dx$；

（5）$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$；　　（6）$\int \sqrt[m]{x^n}dx$；

（7）$\int 5x^3dx$；　　（8）$\int (x^2-3x+2)dx$；

（9）$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$（$g$ 是常数）；　　（10）$\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$；

（11）$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$；　　（12）$\int (2e^x+\frac{3}{x})dx$.

4. 一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

§4.2　换元积分法

一般来说，求不定积分要比求导数困难得多，但也有一些基本方法．换元积分法就是计算不定积分的重要方法之一，它是通过积分变量的代换，使欲求的不

定积分转化为能直接利用基本积分公式来计算的方法．换元积分法分为第一类换元法和第二类换元法．

4.2.1　第一类换元法（凑微分法）

第一类换元法也称为凑微分法，我们先给出如下定理：

定理 4-3（第一类换元法）　设函数 $u=\varphi(x)$ 可导，若 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}=F[\varphi(x)]+C \tag{4-1}$$

证　根据复合函数求导法则，以及 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，有

$$\frac{\mathrm{d}F[\varphi(x)]}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

所以，$F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的一个原函数，故结论成立．证毕．

定理 4-3 表明，当被积函数具有 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式时，可设 $\varphi(x)=u$，将不定积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 转化为 $\int f(u)\mathrm{d}u$，计算出该不定积分之后，再将 $u=\varphi(x)$ 代回即可．

（4-1）式称为**第一类换元公式**，运用时可遵循如下步骤：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{设}\varphi(x)=u]{\text{换　元}}\int f(u)\mathrm{d}u\xlongequal{\text{积分}}F(u)+C$$

$$\xlongequal[u=\varphi(x)]{\text{代　回}}F[\varphi(x)]+C.$$

因为微分 $\mathrm{d}\varphi(x)=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，我们约定将被积表达式 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 形式地记为 $f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$，这时不定积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 就记为 $\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$．由于这种记法具有拼凑微分之意，所以第一类换元法也常称为**凑微分法**．

对于一个具体的不定积分，是否能够使用第一类换元法，关键是看它的被积函数能否表示为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式，或者被积表达式能否表示为 $f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式．下面我们来看几个例子．

例 4-5　求 $\int\sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$．

分析　因为 $\sin^3 x\cos x=\sin^3 x\cdot(\sin x)'$，所以被积函数具有 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式，即 $\varphi(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=f(\sin x)=\sin^3 x$，故可以使用第一类换元法．

解　$\int\sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int\sin^3 x\cdot(\sin x)'\,\mathrm{d}x=\int\sin^3 x\,\mathrm{d}(\sin x)\xlongequal[\text{设}\sin x=u]{\text{换　元}}\int u^3\mathrm{d}u$

$\xlongequal[\text{基本公式}]{\text{用积分}}\frac{1}{4}u^4+C\xlongequal[u=\sin x]{\text{代　回}}\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$

例 4-6　求 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

解　被积函数 $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ 可变形为 $-e^{\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x})'$ ，设 $u=\frac{1}{x}$ ，于是

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int\left[-e^{\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x})'\right]dx=-\int e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})=-\int e^{u}du=-e^{u}+C=-e^{\frac{1}{x}}+C .$$

例 4-7　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解　被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{2}{[1+(\sqrt{x})^2]}(\sqrt{x})'$ ，设 $u=\sqrt{x}$ ，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{1}{1+u^2}du=2\arctan u+C=2\arctan\sqrt{x}+C .$$

例 4-8　求 $\int \tan x dx$.

解　被积函数 $\tan x=-\frac{1}{\cos x}(\cos x)'$ ，设 $u=\cos x$ ，于是

$$\int \tan x dx=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C .$$

同理还可以求出：$\int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$.

注意：当运算熟练以后，可以省略设中间变量的步骤.

例 4-9　求下列不定积分：

（1）$\int \sin^4 x\cos^5 x dx$　　（2）$\int \cos^2 x dx$ ；

（3）$\int \cos^4 x dx$ ；　　（4）$\int \sin 2x\cos 3x dx$ ；

（5）$\int \csc x dx$ ；　　（6）$\int \sec^4 x dx$.

解　（1）

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\cos^5 x dx&=\int \sin^4 x\cos^4 x d(\sin x)\\&=\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)\\&=\int \sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)\\&=\int(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x)d(\sin x)\\&=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C .\end{aligned}$$

（2）$\int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x d(2x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

类似可求出$\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

（3）$\int\cos^4 x dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x d(2x)+\frac{1}{8}\int\cos^2 2x d(2x).$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

（4）$\int\sin 2x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx$

$$=\frac{1}{10}\int\sin 5x d(5x)-\frac{1}{2}\int\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C.$$

（5）$\int\csc x dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

由于$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x$，所以上述结果还可以写成：

$$\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

另解 $\int\csc x dx=\int\frac{\csc x(\csc x+\cot x)}{\csc x+\cot x}dx=-\int\frac{(\csc x+\cot x)'dx}{\csc x+\cot x}$

$$=-\int\frac{d(\csc x+\cot x)}{\csc x+\cot x}=-\ln\left|\csc x+\cot x\right|+C.$$

同理还可以求出：$\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

（6）$\int \sec^4 x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}(\tan x) = \int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}\,(\tan x)$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\,.$$

例 4-10　求下列不定积分：

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$，（$a \neq 0$）；　　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$，（$a \neq 0$）；

（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，（$a > 0$）；　　（4）$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\,.$

（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,.$$

（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\,.$

（4）$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,(1-x^2)$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C\,.$$

例 4-11　求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

解　（1）$\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}\ln(1+x^2) = \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + C\,.$$

（2）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$

$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\ \mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

常用凑微分公式参见附录 C 第一部分.

4.2.2 第二类换元法

定理 4-4（第二类换元法） 设函数 $x=\psi(t)$ 单调、可导，且 $\psi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)} = G[\psi^{-1}(x)]+C \tag{4-2}$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

证 根据复合函数和反函数求导法则，以及 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$，有

$$\frac{\mathrm{d}G[\psi^{-1}(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(\psi(t))\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)} = f(x).$$

所以，$G(\psi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故结论成立. 证毕.

定理 4-4 表明，如果适当选择单调、可导的函数 $x=\psi(t)$ 作变量替换，将不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 转化为 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$，计算出该不定积分之后，再将 $t=\psi^{-1}(x)$ 代回即可.

（4-2）式称为**第二类换元公式**，运用时可遵循如下步骤：

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\psi'(t)\mathrm{d}t]{\text{换元：}x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$$

$$\xlongequal[t=\psi^{-1}(x)]{\text{代回}} G(\psi^{-1}(x))+C.$$

使用第二类换元法时，要特别注意对变量替换的适当选择，其目的是使得变量替换后的不定积分容易计算. 同时还要做到**"两换一还原"**，两换是指：一换被积函数，二换积分变量，缺一不可；一还原是指：积分之后必须还原变量.

首先来看可以利用三角函数代换，变根式积分为三角有理式积分的换元方法. 这个方法的根本思想就是去掉被积函数中的根号.

例 4-12 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解 设 $x=a\sin t$ （$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$）， 则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$， $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$ ，于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\cdot a\cos t\mathrm{d}t = \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

由 $x=a\sin t$ 知：$\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$（如图 4-2 所示），

$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}=\dfrac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$，因而

原式 $=\dfrac{1}{2}a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

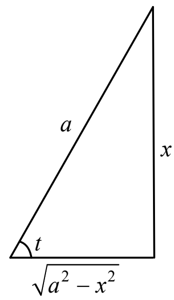

图 4-2

注意：1）一般来说，若被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，则可设 $x=a\sin t$，$t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，这时 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$；也可设 $x=a\cos t$，$t\in(0,\pi)$，这时 $\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t$.

2）作三角函数代换，最后进行变量还原时，可利用简单解直角三角形来示意．本题中显然 $\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

例 4-13 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$（$a>0$）.

解 设 $x=a\tan t$（$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$），则 $t=\arctan\dfrac{x}{a}$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

由 $x=a\tan t$ 知：$\sec t=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$（如图 4-3 所示），因而

$$\text{原式}=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\quad(C=C_1-\ln a).$$

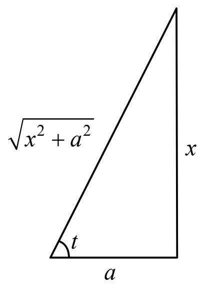

图 4-3

注意：若被积函数中含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，则可设 $x=a\tan t$，$t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，这时有 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$.

例 4-14 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$（$a>0$）.

解 因为定义域 $D=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，分两种情况讨论：

① 当 $x>a$ 时，设 $x=a\sec t$（$0<t<\dfrac{\pi}{2}$），则

原式 $=\displaystyle\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$

由 $x=a\sec t$ 知：$\cos t=\dfrac{a}{x}$，因而有 $\tan t=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$（如图 4-4 所示），故

$$原式=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C \quad (C=C_1-\ln a).$$

② 当 $x<-a$ 时，设 $x=-u$，则 $u>a$，由①得

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C_2=\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C_2\\&=\ln\left|\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right|+C_2=\ln\left|-x-\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C \quad (C=C_2-2\ln a).\end{aligned}$$

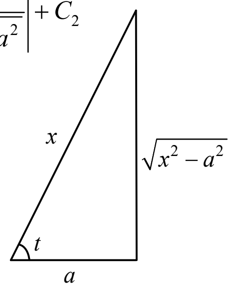

图 4-4

根据①和②的讨论，可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C（a>0）.$$

注意：若被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，则当 $x>a$ 时，可设 $x=a\sec t, t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，这时有 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$；当 $x<-a$ 时，可设 $u=-x$ 转化为 $u>a$ 的情况.

在上面所讲的例子中，有一些是以后经常要用到的，我们可以将其结果当作公式来使用．作为对基本积分公式的补充，将它们列表如下：

（14）$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$，

（15）$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$，

（16）$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$，

（17）$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$，

（18）$\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$，

（19）$\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$，

（20）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$，其中 $a\neq 0$，

（21）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$，其中 $a\neq 0$，

（22）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$，其中 $a>0$， （23）$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$，其中 $a>0$，

（24）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$，其中 $a>0$，

（25）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$，其中 $a>0$.

下面我们来看几个运用公式的例子.

例 4-15 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}}\mathrm{d}x$，

利用公式 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$，有

原式 $=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{9}{4}}\right|+C_1=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C$.

例 4-16 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}(x+1)$，

利用公式 $\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$，有

原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

例 4-17 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$，

利用公式 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$，有

原式=$\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

第二类换元法还有其他一些非常特别的运用，比如**倒代换**，举例如下：

例 4-18 求 $\int\frac{dx}{x(x^7+2)}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{dt}{t^2}$，

原式 $=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}dt=-\frac{1}{14}\int\frac{1}{1+2t^7}d(1+2t^7)=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C$

$=-\frac{1}{14}\ln|x^7+2|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$.

例 4-19 求 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{dt}{t^2}$，于是

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int|t|\sqrt{a^2t^2-1}dt.$$

当 $x>0$ 时，

原式 $=-\int t\sqrt{a^2t^2-1}dt=-\frac{1}{2a^2}\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}d(a^2t^2-1)$

$=-\frac{1}{3a^2}(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3a^2}(\frac{a^2}{x^2}-1)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$.

当 $x<0$ 时，同样可得上述结果.

下面的例子表明，换元法虽然也有些规律可循，但在具体运用时十分灵活. 不定积分的计算在很大程度上依赖于运算方法、运算技巧以及我们的实际经验.

例 4-20 求 $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

解法一 设 $x=2\sin t$ （$|t|<\frac{\pi}{2}$），则

原式 $=\int\frac{2\cos t}{4\sin t\cos t}dt=\frac{1}{2}\int\csc t\,dt=\frac{1}{2}\ln\left|\csc t-\cot t\right|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$.

解法二 设 $x=\frac{1}{t}$ （$|t|>\frac{1}{2}$），则

原式 $=\int\frac{t^2}{\sqrt{4t^2-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\,2t+\sqrt{4t^2-1}\,\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\,\right|+C\,.$$

解法三　设 $\sqrt{4-x^2}=t\quad(0<t<2)$，则 $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，

$$原式=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\,\frac{t-2}{t+2}\,\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\,\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\,\right|+C\,.$$

本例采用三种不同的方法换元，其结果形式虽然不同，但均可互相转化．此外，本例还可采用其他方法换元，比如，设 $x^2=\dfrac{1}{t}\quad(t>\dfrac{1}{4})$，$\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=t\quad(t>0)$ 等，从而进一步说明换元积分法的灵活性．我们只有在熟记基本公式的基础上，通过做大量的练习去积累经验，才能做到熟中求巧，运用自如．

习题 4.2

1. 填空题：

（1）在下列等号右端填入适当系数，使等式成立：

$\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}\dfrac{x}{2}$　　　　$x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(x^2+1)$

$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(5+6\ln x)$　　　　$\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}(1+\dfrac{1}{x})$

$\cos 2x\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\sin 2x)$　　　　$\dfrac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\arctan 2x)$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\arcsin 4x)$　　　　$\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

（2）$\int\cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x=$__________；

（3）若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=$__________．

2. 选择题：

（1）下列凑微分正确的是（　　）；

A. $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\cos x$　　　　B. $\sqrt{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sqrt{x}$

C. $\arcsin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　D. $2xe^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}e^{x^2}$

（2）求 $\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ 时，经变量代换 $x=\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，与此积分相等的是（　　）.

A. $\int\sec t\mathrm{d}t$　　B. $\int\sec^3 t\mathrm{d}t$

C. $\int\frac{\sec t}{1+t^2}\mathrm{d}t$　　D. $-\int\sec^3 t\mathrm{d}t$

3. 求下列不定积分：

（1）$\int\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$；　（2）$\int(3-2x)^3\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$；　（4）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$；

（5）$\int(\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x$；　（6）$\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$；

（7）$\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x$；　（8）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$；

（9）$\int\tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；　（10）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$；

（11）$\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；　（12）$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

（13）$\int x\cdot\cos(x^2)\mathrm{d}x$；　（14）$\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$；

（15）$\int\frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$；　（16）$\int\cos^2(\omega t+\phi)\sin(\omega t+\phi)\mathrm{d}t$；

（17）$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；　（18）$\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$；

（19）$\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$；　（20）$\int\frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$；

（21）$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）；　（22）$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$；

（23）$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$；　（24）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

（25）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；（提示：可令 $x=\frac{1}{t}$）

（26）$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$.（提示：可令 $1+\sqrt{2x}=t$）

§4.3 分部积分法

分部积分法是计算不定积分的另一种重要方法，该方法很容易从两个函数乘积的求导法则推导出来.

定理 4-5 若函数$u(x)$与$v(x)$可导，且不定积分$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$存在，则不定积分$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$也存在，并有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{4-3}$$

证 因为 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$，所以有

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$$

两端同时积分，可得

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int [u(x)v(x)]'\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

证毕.

（4-3）式称为**分部积分公式**，也可以形式地写为

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x) \tag{4-4}$$

需要说明的是，（4-4）式是分部积分公式的一种简单记法，它巧妙地利用了导数与微分之间的关系$v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$和$u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$，具有“凑微分”之意．在不定积分的计算中，运用（4-4）式往往能达到简化书写且不易出错的效果.

一般来说，如果不定积分$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$不易计算，而$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$容易计算时，可以运用分部积分法，以便化难为易.

通常，下列类型的被积函数可以考虑运用分部积分法（其中m,n都是正整数）：

$x^n \sin mx$； $x^n \cos mx$；

$\mathrm{e}^{nx} \sin mx$； $\mathrm{e}^{nx} \cos mx$；

$x^n \mathrm{e}^{mx}$； $x^n (\ln x)$；

$x^n \arcsin mx$； $x^n \arccos mx$； $x^n \arctan mx$.

例 4-21 求$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解 设$u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$，则有$u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$（为了简单起见，求$v(x)$时我们省掉了积分常数，因为最终的不定积分也会加一个任意常数），根据分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x &= \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\sin x - \int 1\cdot \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

值得注意的是，如果在本例中设$u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$，则$u'(x) = -\sin x$，

$v(x)=\dfrac{x^2}{2}$，这时有

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x\ .$$

这样反而会使计算更加复杂．由此可见，使用分部积分法的关键在于被积函数中$u(x)$和$v(x)$的适当选择，一般来说应该考虑以下两点：

1）由$v'(x)$（或$\mathrm{d}v(x)$）要容易求得$v(x)$；

2）$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$要比$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$容易计算.

例 4-22　求下列不定积分：

（1）$\int x\ln x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int\arccos x\mathrm{d}x$；

（3）$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　（4）$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解　（1）设$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$，则有$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$，根据分部积分公式可得

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\ .$$

注意：分部积分法运用熟练之后，可以省去设$u(x)$和$v(x)$这一步，比如，上述计算可以直接写为

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int(\ln x)'\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\ .$$

也可以运用公式$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$，将上面的计算过程书写为

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\ .$$

（2）$\int\arccos x\,\mathrm{d}x=x\arccos x-\int x\,\mathrm{d}(\arccos x)$

$$=x\arccos x+\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

说明 在本小题中，$\arccos x = u(x)$，$\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$.

（3）$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^2\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^2) = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C\,.$$

（4）$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x = \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C\,.$$

由以上例题，我们总结出选择 $u(x)$ 的一条准则，那就是“**反、对、幂、指、三，排序在前者优先选为** $u(x)$”，即如果被积函数是由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数中的两种相乘而成，则可按准则中的顺序选取 $u(x)$．比如，例 4-22（1）的被积函数 $x\ln x$ 就是由幂函数和对数函数相乘而构成，此时按照准则中的前半句话得知：对数函数在幂函数之前，所以选择对数函数为 $u(x)$，即 $u(x) = \ln x$．

例 4-23 求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\cos x) = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$$= -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$= \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x\,,$$

移项、求解，得

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C\,.$$

注意：若被积函数是指数函数与正（余）弦函数的乘积，则 $u(x)$ 可随意选取，但在两次分部积分中，必须选用同类型的函数为 $u(x)$，以便经过两次分部积分后产生循环式，从而解出所求的不定积分.

例 4-24 求$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$，并由此计算以下两个不定积分：

（1）$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）；　　　　（2）$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \int \sec x\,\mathrm{d}(\tan x)\\ &= \sec x\tan x - \int \tan x\sec x\tan x\mathrm{d}x\\ &= \sec x\tan x - \int (\sec^2 x-1)\sec x\mathrm{d}x\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x| + C.\end{aligned}$$

注意：某些不定积分可以化为某式减该积分，则该积分等于$\frac{1}{2}$此式.

（1）对于不定积分$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$，令$x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= a^2\int \sec t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}x = a^2\int \sec^3 t\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\sec t\tan t + \frac{a^2}{2}\ln\left|\sec t+\tan t\right| + C_1\\ &= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right| + C_1\\ &\xlongequal{\text{令}C=C_1-\frac{a^2}{2}\ln a} \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x - a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right] - \left[a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right] + C\\ &= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.\end{aligned}$$

例 4-25 求$\int \sin^n x\mathrm{d}x$（n为大于 1 的正整数）.

解
$$\begin{aligned}\int \sin^n x\mathrm{d}x &= -\int \sin^{n-1} x\mathrm{d}(\cos x)\\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + \int \cos^2 x\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\mathrm{d}x\\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x .$$

若设 $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$，则上述计算公式可表示为

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

这是一个关于 n 的递推公式，反复使用该公式，最后就归结为求 $\sin x$ 的一次幂或零次幂的简单不定积分了．下面再举一个递推公式的例子．

例 4-26　求 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ （n 为正整数）．

解　设 $u(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ ，$v'(x) = 1$ ，则 $u'(x) = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ ，$v(x) = x$ ，于是

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} . \end{aligned}$$

得到递推公式

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n .$$

已知 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$，利用递推公式可求得任意 I_n．例如，

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 \\ &= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1\right) \\ &= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C . \end{aligned}$$

有时，求不定积分也需要兼用换元法与分部积分法，如下例：

例 4-27　求 $\int x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　设 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，因而

$$\begin{aligned} \int x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int t^3\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int t^3 d(\mathrm{e}^t) = 2t^3\mathrm{e}^t - 6\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= 2t^3\mathrm{e}^t - 6\int t^2 d(\mathrm{e}^t) = 2t^3\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t + 12\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= 2t^3\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t + 12\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t) = 2t^3\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t + 12t\mathrm{e}^t - 12\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= 2t^3\mathrm{e}^t - 6t^2\mathrm{e}^t + 12t\mathrm{e}^t - 12\mathrm{e}^t + C = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C .$$

习题 4.3

1. 填空题：

（1）若 $u(x)v(x) = -x\sin x$，$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \cos x + C$，则 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x =$ ____；

（2）设 $f(x) = \cos 2x$，则 $\int xf''(x)\mathrm{d}x =$ ________；

（3）$\int \ln\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x =$ ________.

2. 选择题：

（1）下列分部积分中，$u(x)$ 和 $v'(x)$ 选择正确的有（　　）;

A. $\int x\cos 2x\mathrm{d}x,\ u(x) = x,\ v'(x) = \cos 2x$

B. $\int x\cos 2x\mathrm{d}x,\ u(x) = \cos 2x,\ v'(x) = x$

C. $\int \ln x\mathrm{d}x,\ u(x) = 1,\ v'(x) = \ln x$

D. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x,\ u(x) = x^2,\ v'(x) = \ln x$

（2）$\int x\mathrm{d}(\sin x) =$（　　）.

A. $x\sin x - \cos x + C$　　B. $x\sin x - \sin x + C$

C. $x\sin x + \cos x + C$　　D. $x\sin x + \sin x + C$

3. 计算下列不定积分：

（1）$\int \ln x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$；　　（4）$\int x\cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$；

（5）$\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$；　　（6）$\int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$；

（7）$\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$；　　（8）$\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$；

（9）$\int \dfrac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　（10）$\int \cos\ln x\mathrm{d}x$；

（11）$\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

§4.4　有理函数以及可化为有理函数的积分

本节我们将介绍一些特殊类型函数的积分方法，包括有理函数的积分及可化为有理函数的积分（如三角函数有理式的积分、简单无理函数的积分）.

4.4.1　有理函数的积分

由两个多项式函数的商所表示的函数称为**有理函数**，又称为**有理分式**．即形如：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_{m-1}x+b_m}$$

其中 m,n 都为非负整数，a_i,b_j （$i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m$）都是实数，且 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$．

如果 $n\geqslant m$，则称 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为**有理假分式**；如果 $n<m$，则称 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为**有理真分式**.

当 $n\geqslant m$ 时，根据多项式的带余除法，有 $P(x)=g(x)Q(x)+r(x)$，其中：$r(x)=0$ 或者 $r(x)$ 的幂次小于 $Q(x)$ 的幂次．于是，$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=g(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$，而 $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式．比如：

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}.$$

所以，我们可以得出如下结论：

任何一个有理分式一定可以表示成一个多项式函数与一个有理真分式之和.

我们知道，多项式函数的不定积分是简单的，所以，只要能有效解决有理真分式的不定积分问题，就能有效解决有理分式的不定积分问题．这样，我们的重点就放到如何解决有理真分式的不定积分上来了.

对于有理真分式，我们有如下概念和结论：

（1）形如 $\dfrac{A}{x-a},\dfrac{A}{(x-a)^n},\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ 及 $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ 的有理真分式称为**部分分式**，其中，n 是大于 1 的整数，x^2+px+q 是实数域上的不可约多项式（即 $p^2-4q<0$）.

（2）任何一个有理真分式必能表示成一系列部分分式之和.

下面我们给出有理真分式表示成部分分式之和的基本方法.

我们采用的基本方法称为**待定系数法**，具体步骤如下：

首先，求出 $Q(x)$ 的标准分解式，设 $Q(x)$ 的标准分解式为

$$Q(x)=b(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}.$$

再设

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{l_1}}{(x-\alpha_1)^{l_1}}+\cdots\\&\quad+\frac{B_1}{x-\alpha_k}+\frac{B_2}{(x-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{B_{l_k}}{(x-\alpha_k)^{l_k}}\end{aligned}$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\cdots$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\cdots+\frac{E_{s_t}x+F_{s_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}}$$

其中，$A_1,\cdots,A_{l_1},\cdots,B_1,\cdots,B_{l_k},C_1,D_1,\cdots,C_{s_1},D_{s_1},E_1,F_1,\cdots,E_{s_t},F_{s_t}$ 为待定系数.

然后等式右边进行通分，相加后把分子整理成一个多项式，比较等式两边分子同次项系数，得到一个线性方程组，最后解线性方程组，求出所有待定系数. 这样，该有理真分式就表示成部分分式之和了.

在分解过程中，要特别强调的是：

如果 $Q(x)$ 的标准分解式中有因式 $\left(x-\alpha\right)^l$，那么在分解成部分分式之和的时候，和式中必须含有

$$\frac{A_1}{x-\alpha},\ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2},\ \cdots\ ,\frac{A_l}{(x-\alpha)^l}$$

这 l 个部分分式. 同样地，若 $Q(x)$ 的标准分解式中有因式 $(x^2+px+q)^s$，那么在分解成部分分式之和的时候，和式中同样必须含有

$$\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q},\ \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2},\ \cdots,\ \frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s}$$

这 s 个部分分式.

比如：把 $\dfrac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^3(x^2+x+1)}$ 表示成部分分式之和的过程如下：

$$\frac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^3(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{A(x+1)^2(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+C(x^2+x+1)+(Dx+E)(x+1)^3}{(x+1)^3(x^2+x+1)}.$$

其中，分子

$$\begin{aligned}&A\left(x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)+B\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)+C\left(x^2+x+1\right)+\left(Dx+E\right)\left(x+1\right)^3\\&=\left(A+D\right)x^4+\left(3A+B+3D+E\right)x^3+\left(4A+2B+C+3D+3E\right)x^2\\&\quad+\left(3A+2B+C+D+3E\right)x+\left(A+B+C+E\right).\end{aligned}$$

比较等式两边分子多项式同次项系数，由

$$\begin{aligned}3x^4+10x^3+16x^2+11x+3=&\left(A+D\right)x^4+\left(3A+B+3D+E\right)x^3\\&+\left(4A+2B+C+3D+3E\right)x^2\\&+\left(3A+2B+C+D+3E\right)x+\left(A+B+C+E\right).\end{aligned}$$

得 $\begin{cases}A+D=3\\3A+B+3D+E=10\\4A+2B+C+3D+3E=16\\3A+2B+C+D+3E=11\\A+B+C+E=3\end{cases}$，解方程组得 $\begin{cases}A=1\\B=-2\\C=1\\D=2\\E=3\end{cases}$.

即 $\dfrac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$.

综上所述，只要我们将有理真分式表示成部分分式之和，并且求得每个部分分式的不定积分，就最终可以求得有理函数的不定积分.

下面我们来看各种部分分式的不定积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}\mathrm{d}x=A\ln|x-\alpha|+C$.

（2）$\displaystyle\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+C$（$n$ 是大于 1 的整数）.

（3）$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\int\frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)$$
$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

（4）$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\int\frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{\left[\left(q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\right]^n}\mathrm{d}x.$$

上式中剩下的积分就是形如 $\displaystyle\int\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x$（$n>1$）的积分，而这个积分可以由例 4-26 所得到的递推公式解决.

这样，有理函数的不定积分问题就可以完全得到解决.

下面我们来看几个具体的例子.

例 4-28 求 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

解 设 $\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$，则

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}.$$

于是$\begin{cases}A+B=1\\2A+B=0\end{cases}$，解方程组得$\begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}$.

所以 $\int\frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{2}{x+2}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|+C$.

例 4-29 求$\int\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}\mathrm{d}x$.

解 设$\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+6}$，则

$$\begin{aligned}\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}&=\frac{A(x^2+4x+6)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+4x+6)}\\&=\frac{(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(6A+C)}{(x+1)(x^2+4x+6)}.\end{aligned}$$

于是$\begin{cases}A+B=0\\4A+B+C=2\\6A+C=5\end{cases}$，解方程组得$\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$.

所以 $\int\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{x+1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+6)'}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+6|+\int\frac{1}{2+(x+2)^2}\mathrm{d}x\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+6|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

例 4-30 求$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2(x^2+2x+2)}+\int\frac{1+(x+1)^2}{[1+(x+1)^2]^2}\mathrm{d}(x+1)-\int\frac{(x+1)^2}{[1+(x+1)^2]^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2(x^2+2x+2)}+\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1)+\frac{1}{2}\int(x+1)\mathrm{d}\frac{1}{1+(x+1)^2}\\&=-\frac{1}{2(x^2+2x+2)}+\arctan(x+1)+\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1)\end{aligned}$$

$$=\frac{x}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C.$$

4.4.2 可化为有理函数的积分

有些特殊类型的积分可以通过变量替换转化为有理函数的积分，下面我们主要介绍如何将三角函数有理式和一些简单无理函数的积分转化为有理函数的积分.

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(x)$ 为有理函数，则下列几种三角函数有理式可以通过相应的变量替换转化为有理函数的积分：

① $\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x \xlongequal{设t=\sin x} \int R(t)\mathrm{d}t$.

② $\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x \xlongequal{设t=\cos x} -\int R(t)\mathrm{d}t$.

③ $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\tan x)\mathrm{d}x \xlongequal{设t=\tan x} \int R(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},t)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

④ $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \xlongequal{设t=\tan\frac{x}{2}} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

其中，变量替换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 总能将三角函数有理式的积分转化为关于 t 的有理函数的积分，所以，该替换也称为**万能替换**.

例 4-31 求 $\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 设 $t=\sin x$，则

$$\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{(1+t)(1-t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|1+t|-\ln|1-t|)+C=\frac{1}{2}(\ln|1+\sin x|-\ln|1-\sin x|)+C.$$

例 4-32 求 $\int\frac{\tan x+1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 设 $t=\tan x$，则

$$\int\frac{\tan x+1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{t+1}{\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{t+1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{t}+C=\ln|\tan x|-\frac{1}{\tan x}+C.$$

例 4-33 求$\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解 使用万能替换，设$t=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

2. 一些简单无理函数的积分

一般来说，无理函数的积分难度较大，但一些简单无理函数的积分可以通过变量替换去掉根号，转化为有理函数的积分，下面我们给出几个例子.

例 4-34 求$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解 设$t=\sqrt{x-1}$，则$x=t^2+1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\mathrm{d}t-2\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=2t-2\arctan t+C=2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.$$

例 4-35 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 设$t=\sqrt[3]{x+2}$，则$x=t^3-2$，$\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}=\int\frac{3t^2\mathrm{d}t}{1+t}=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t=3\int\left[(t-1)+\frac{1}{1+t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C.$$

例 4-36 求$\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$.

解 设$t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$，则$x=\dfrac{1}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$，于是

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int(t^2-1)\cdot t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2t+2\ln(t+1)-\ln|t^2-1|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)+\ln|x|+C.$$

注意：如果被积函数中含有根式$\sqrt[n]{ax+b}$或$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以设这个根式为$t$，原积分就可化为有理函数的积分.

例 4-37 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

解 设$x=t^6$（$t>0$），则

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$=6(t-\arctan t)+C$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.$$

注意：如果被积函数中含有同底根式$\sqrt[m]{ax+b}$、$\sqrt[n]{ax+b}$等，可设$ax+b=t^s$ （$t>0$）（s为各根指数的最小公倍数），原积分就可化为有理函数的积分.

本章我们介绍了不定积分的概念及计算方法．必须指出的是：初等函数在它有定义的区间上的不定积分一定存在，但不定积分存在与不定积分能否用初等函数表示出来不是一回事．事实上，有很多初等函数，它们的不定积分虽然存在，但却无法用初等函数表示出来，也就是说，它们的原函数不是初等函数．例如

$$\int e^{-x^2}dx,\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

同时我们还应了解，求不定积分虽然是求导数的逆运算，但在难易程度上却有很大的差别．对于可导函数来说，根据求导法则、导数公式或者导数定义，一般总能按照一定的步骤求出函数的导数，方法相对简单，难度往往不大；但对于不定积分来说，计算却并无统一的规则可循，需要具体问题具体分析，灵活应用各种积分方法和技巧，难度往往较大．为了方便，我们把常用的积分公式汇集成表，这种表叫做**积分表**（见本书附录C第二部分），它是按照被积函数的类型来排列的．求积分时，可以根据被积函数的类型直接引用表中的结果，或者在计算过程的某个环节查表得到所需要的结果．

习题 4.4

1. 计算下列不定积分：

（1）$\int\frac{x^3}{x+3}dx$； （2）$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$；

（3）$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$；

（5）$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$；

（6）$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$；

（7）$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$

（8）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

（9）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；

（10）$\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

（11）$\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$；

（12）$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$；

（13）$\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x$；

（14）$\int \frac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x$；

（15）$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$；

（16）$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$；

（17）$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$；

（18）$\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$；

（19）$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$；

（20）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

（21）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；

（22）$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$；

（23）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

总习题四

1. 填空题：

（1）若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$________；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线斜率为 $\frac{1}{4}x$，且过点 $(2,\frac{5}{2})$，则该曲线方程为________；

（3）$\int (2-x)^{99}\mathrm{d}x=$________，$\int f'(2x)\mathrm{d}x=$________；

（4）若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=$________；

（5）若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$，则 $f^{(n)}(x)=$________；

（6）已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

2. 选择题：

（1）（　　）是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的原函数；

A. $\ln x$　　B. $-\dfrac{1}{x^2}$　　C. $\dfrac{1}{x^2}$　　D. $\sqrt{x}$

（2）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，则 $f(x)=$（　　）；

A. $2x\mathrm{e}^{2x}$　　B. $2x^2\mathrm{e}^{2x}$　　C. $x\mathrm{e}^{2x}$　　D. $2x(1+x)\mathrm{e}^{2x}$

（3）若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\cos x$，则 $f'(x)=$（　　）；

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$　　C. $\cos x$　　D. $-\cos x$

（4）下列凑微分形式正确的是（　　）；

A. $\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\cos x$　　B. $x\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x^2}$

C. $\arctan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　D. $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\dfrac{1}{x^2})$

（5）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int f(2x)\mathrm{d}x=$（　　）；

A. $F(x)+C$　　B. $F(2x)+C$

C. $\dfrac{1}{2}F(2x)+C$　　D. $2F(x)+C$

（6）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=$（　　）；

A. $2(1-x^2)^2+C$　　B. $-2(1-x^2)^2+C$

C. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　D. $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

（7）设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 都有连续的导数，则（　　）；

A. $\int u'\mathrm{d}v = uv-\int v'\mathrm{d}u$　　B. $\int uv\mathrm{d}x = uv+\int vu\mathrm{d}x$

C. $\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$　　D. $\int uv\mathrm{d}x = uv-\int uv'\mathrm{d}x$

（8）$\int xf(x^2)f'(x^2)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}f^2(x)+C$　　B. $\dfrac{1}{2}f^2(x^2)+C$

C. $\dfrac{1}{4}f^2(x)+C$　　D. $\dfrac{1}{4}f^2(x^2)+C$

3. 计算下列不定积分：

（1）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$；　　（2）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

（3）$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{x}}}$；

（5）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}$；

（6）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^{2}-x^{2})^{5/2}}$；

（7）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{4}\sqrt{1+x^{2}}}$；

（8）$\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

（9）$\int \ln(1+x^{2})\mathrm{d}x$；

（10）$\int \frac{\sin^{2}x}{\cos^{3}x}\mathrm{d}x$.