第 3 章　随机变量及其分布

随机变量是概率论的重要内容，本章主要介绍随机变量的相关概念，如分布函数、分布律、密度函数，并讨论其性质。

3.1　随机变量及其分布

1. 随机变量

在随机现象中许多试验的结果本身就是数量，如电子元件的使用寿命、掷骰子出现的点数等。但是也有一些随机试验的结果不是数量，如抛掷硬币观察其反正面、做某个试验是否成功等。稍加留心，就会发现对于那些结果不是数量的试验，可以构造一个函数，将试验结果与数量对应起来，用数量表示，只是这个函数的“自变量”是样本点。如抛掷硬币观察其反正面，可以构造函数，规定“出现正面”对应 1，“出现反面”对应 0，这样做的好处在于可以定义一个变量，将随机试验的每一个结果与变量的某个数值对应起来。用于表示随机试验结果的变量称为随机变量。

对于给定的随机试验，S 是其样本空间，若对于每一个样本点 $\omega \in S$，都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称此定义在 S 上的实值函数 X 为随机变量。

本书中常用大写的英文字母 X、Y、Z 等表示随机变量，小写字母 x、y、z 等表示其取值。

有了随机变量，就可以用它来表示随机事件。一般地，把随机变量 X 取值不超过 x 的事件 $\{\omega | X(\omega) \leqslant x\}$ 简记为 $\{X(\omega) \leqslant x\}$ 或 $\{X \leqslant x\}$，并将事件 $\{X \leqslant x\}$ 的概率记为 $P(X \leqslant x)$。

2. 随机变量的分布函数

引进分布函数来描述随机变量的统计规律。

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数 $F(x) = P(X \leqslant x)$ 为随机变量 X 的分布函数。

根据分布函数的定义可知

$$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$$

例 3.1　将一枚均匀硬币连抛两次，试写出出现正面次数 X 的分布函数及概率 $P(0 < X \leqslant 1)$，$P(1 \leqslant X \leqslant 2)$。

解 X可能取的值为 0、1、2，由古典概型的计算公式，可知X取这些值的概率依次为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$。

当$x<0$时，

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\varnothing)=0;$$

当$0\leqslant x<1$时，

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)=\frac{1}{4};$$

当$1\leqslant x<2$时，

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{3}{4};$$

当$2\leqslant x$时，

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1。$$

即有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1\\ \frac{3}{4}, & 1\leqslant x<2\\ 1, & 2\leqslant x\end{cases}$$

该$F(x)$的图形如图 3-1 所示。

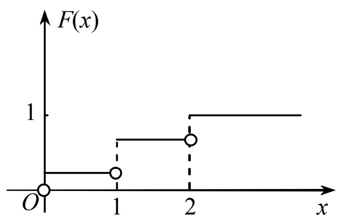


图 3-1

$F(x)$的图形：它是阶梯形的，在$x=0$、1、2 处有阶跃，而跃变值恰好是随机变量X在这些点处取值的概率。

概率$P(0<X\leqslant 1)=F(1)-F(0)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$；$P(1\leqslant X\leqslant 2)=P(X=1)+P(1<X\leqslant 2)=P(X=1)+F(2)-F(1)=\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$。

分布函数具有以下一些性质：

（1）$F(x)$为单调不减函数，即若$x_1<x_2$，则有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

（2）$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$；

（3）$F(x)$ 是右连续函数，即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$（$-\infty < x_0 < +\infty$）。

证明 （1）对于任意两点 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，事件 $\{X \leqslant x_1\} \subset \{X \leqslant x_2\}$，因此，由概率的性质可知 $P(X \leqslant x_1) \leqslant P(X \leqslant x_2)$，即 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$。

（2）由于 $F(x) = P(X \leqslant x)$，由概率的性质可知 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$。

若 x 沿着数轴无限向左移动（即 $x \to -\infty$），则随机事件"X 落在 $(-\infty, x]$ 内"趋于不可能事件，从而其概率趋于 0，亦即 $F(-\infty) = 0$；又若将 x 无限右移（即 $x \to +\infty$），则随机事件"X 落在 $(-\infty, x]$ 内"趋于必然事件，从而其概率为 1，亦即 $F(+\infty) = 1$。

（3）证明从略。

3.2 离散型随机变量

1. 离散型随机变量及其分布律

按照随机变量的可能取值，可将随机变量分为离散型随机变量和连续型随机变量。

若随机变量 X 可能取的值为 x_1, x_2, …，事件 $\{X = x_i\}$ 的概率为 p_i（$i = 1, 2, \cdots$），它满足

（1）$p_i \geqslant 0$；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$。

X 为离散型随机变量，并称 $P(X = x_i) = p_i$（$i = 1, 2, \cdots$）为 X 的分布律。

通常用以下表格来表达 X 的分布律：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
概率	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

例 3.2 某人的手枪里有 5 发子弹，他向一个目标独立射击，直到首次击中才停止射击。已知每发子弹命中目标的概率为 0.6，求消耗子弹数 X 的分布律。

解 X 的可能取值为：1、2、3、4、5。

对于 $1 \leqslant k \leqslant 4$ 有 $P(X = k) = 0.4^{k-1} \times 0.6$

而 $P(X = 5) = P(\text{前4发子弹没中}) = 0.4^4$

因此，X 的分布律为：

X	1	2	3	4	5
概率	0.6	0.4×0.6	$0.4^2 \times 0.6$	$0.4^3 \times 0.6$	0.4^4

2．常用离散型分布

（1）两点分布。

如果 X 的分布律为

X	0	1
概率	$1-p$	p

其中 $0<p<1$，则称 X 的分布为两点分布，记作 $X \sim B(1,p)$。

一般在随机试验中虽然结果可以很多，但若只关心具有某种性质的结果，则可将样本空间划分为：A 与非 A，A 出现时，定义 $X=1$；$\overline{A}$ 出现时，定义 $X=0$，此时 X 的分布即为两点分布。如抛一枚硬币，仅有“出现正面”和“出现背面”两种结果；向一个目标射击，关心“命中目标”和“未命中目标”等。

例 3.3 100 个产品中有 5 个次品，从中抽一件进行检查，设 X 是抽到的合格品数，试写出 X 的分布律。

解 设 $A=\{抽到合格品\}$，则 $\{X=1\}=A$，$\{X=0\}=\overline{A}$，且

$$P(X=0)=\frac{5}{100},\ P(X=1)=\frac{95}{100}$$

X 的分布律为

X	0	1
概率	$\frac{5}{100}$	$\frac{95}{100}$

（2）二项分布。

随机现象的统计规律，往往是通过相同条件下进行大量重复试验和观察而得以揭示的。这种在相同条件下重复试验的数学模型在概率论中占有重要的作用。

在 n 重伯努利试验中，每次试验中基本事件 A 发生的概率保持不变，我们往往感兴趣的是在 n 重伯努利试验中事件 A 出现的总次数 X 及其分布律，显然 X 的可能取值为 0, 1, 2, …, n，且由二项概率得到 X 取 k 值的概率为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad（k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n）$$

因此，X 的分布律为

X	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
概率	$(1-p)^n$	$\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}$	$\cdots$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$\cdots$	p^n

称这个离散型分布为参数为 n、p 的二项分布，记作 $X \sim B(n,p)$，这里 $0<p<1$，$p=P(A)$。

在二项分布中，如果 $n=1$，那么 k 只能取值 0 或 1，显然有 $P(X=0)=1-p$，

$P(X=1)=p$，此时 X 的分布律为：

X	0	1
概率	$1-p$	p

显然两点分布是二项分布的特例。

例 3.4 某设备由三个独立工作的原件构成，该设备在一次试验中每个原件发生故障的概率均为 0.1，试求该设备在一次试验中发生故障的原件个数 X 的分布律及至多有两个原件发生故障的概率。

解 X 为一次试验中发生故障的原件的个数，可能取值为 0、1、2、3。该试验可看作三次重复试验，由伯努利公式有

$$P(X=k)=\binom{3}{k}0.1^k\times(1-0.1)^{3-k}\quad（k=0,\ 1,\ 2,\ 3）$$

故 X 的分布律为

X	0	1	2	3
概率	0.729	0.243	0.027	0.001

至多有两个原件发生故障的概率为

$$P(X\leqslant 2)=1-P(X=3)=1-0.001=0.999$$

例 3.5 某学生参加一项测验，其中有 20 道是非题，其纯粹随机地选择“是”与“非”，试计算该学生至少做对 14 道题目的概率。

解 此学生随机地选择“是”与“非”，他答对每道题的概率为 $p=0.5$，判断 20 道题相当于做 20 重伯努利试验。

设 X 为该学生答对的题目数，则 $X\sim B(20,0.5)$，所求概率为

$$P(X\geqslant 14)=\sum_{k=14}^{20}P(X=k)=\sum_{k=14}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=0.0577$$

如果要求学生至少做对 14 道题，才能通过这次测验，这位学生通过测验的概率仅为 0.0577。

例 3.6 一个工人同时看管 n 部机床，设每部机床在每一分钟内需要修理的概率为 p（$0<p<1$），试求：

1）n 部机床在同一分钟里有 k（$0\leqslant k\leqslant n$）部需要修理的概率。

2）若此工人不能及时修理机床的概率不到 1%，他最多能看管几台机床？

解 在一分钟内观察 n 部机床是否需要修理，相当于是做 n 重伯努利试验，用 X 表示同一分钟内需要修理的机床部数，则 $X\sim B(n,p)$。

1）n 部机床在同一分钟内有 k 部机床需要修理的概率为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

2）由于一名工人在同一时间内只能修理一部机床，当一分钟内有一部以上的

机床需要修理且他无法及时修理的概率为

$$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-(1-P)^n-np(1-p)^{n-1}$$

令 $n_0=\max\{n:1-(1-P)^n-np(1-p)^{n-1}\leqslant 1\%\}$，则 n_0 即为所求。

（3）泊松分布。

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad（k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots）$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 $\lambda>0$，并记作 $X\sim P(\lambda)$。

泊松分布的实际应用很广泛，例如，在单位时间内，某电话交换台接到的电话呼叫次数，高速公路上一天发生的车祸数，某服务台到达的顾客数，放射性物质分裂后落在某一区域内的质点数等，都服从泊松分布。

例 3.7 设每分钟通过某交叉路口的汽车流量 X 服从泊松分布，且已知在一分钟内无车辆通过与恰好有一辆车通过的概率相同，求在一分钟内至少有两辆车通过的概率。

解 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，由题意知

$$P(X=0)=P(X=1)$$

即

$$\frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

解得 $\lambda=1$。

因此，至少有两辆车通过的概率为

$$P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-\frac{1^0}{0!}\mathrm{e}^{-1}-\frac{1^1}{1!}\mathrm{e}^{-1}=1-2\mathrm{e}^{-1}$$

例 3.8 从某商店过去的销售记录可知，某种商品每月的销售数服从参数 $\lambda=5$ 的泊松分布，为了以 70%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少应进某种商品多少件？

解 设该商店每月销售某种商品 X 件，月底的进货为 a 件，则当（$X\leqslant a$）时就不会脱销，因而按题意要求为

$$P(X\leqslant a)\geqslant 0.7$$

已知 X 服从参数 $\lambda=5$ 的泊松分布，上式可转化为

$$\sum_{k=0}^{a}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}\geqslant 0.7$$

由附录 1 的泊松分布表可知

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}\approx 1-0.3840=0.616<0.7$$

$$\sum_{k=0}^{7}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}\approx 1-0.2378=0.7622>0.7$$

于是，这家商店只要在月底进货某种商品 7 件，就可以 70%以上的把握保证这种商品在下个月内不会脱销。

泊松分布和二项分布具有较大的相似，泊松分布可视为二项分布的逼近：

设 $X\sim B(n,p)$，当 n 很大，p 很小，且 $np=\lambda$ 适中时，有

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad（k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots）$$

例 3.9 设收到一批 100 个零件的订货，每一个零件是次品的概率为 0.01，该批零件验证合格的条件是次品数不超过 3 件，试求这批订货合格的概率。

解 设 X 是这批订货中的次品数，则 $X\sim B(100,0.01)$，所求概率为

$$P(X\leqslant 3)=\sum_{k=0}^{k=3}\binom{100}{k}(0.01)^k(1-0.01)^{100-k}$$

其中 $n=100$，$p=0.01$，且 $np=\lambda=1$ 适中，则有

$$P(X\leqslant 3)\approx\sum_{k=0}^{k=3}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}=0.98$$

例 3.10 在某一公司里有 2500 名员工参加了人寿保险，在 1 年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日需要交 12 元保险费，而在死亡时家属可在保险公司领取 2000 元赔偿金。

求：1）保险公司亏本的概率。

2）保险公司分别获利不少于 10000 元、20000 元的概率。

解 1）以“年”为单位考虑，在 1 月 1 日保险公司的总收入为

$$2500\times 12=30000\text{ 元}$$

设在一年死亡的人数为 X，则 $X\sim B(2500,0.002)$，则保险公司在这一年中应付 $2000X$（元），要使保险公司亏本，则必须

$$2000X>30000\text{，即 }X>15\text{（人）}$$

因此，$P(\text{保险公司亏本})=P(X>15)=\sum_{k=16}^{2500}\binom{2500}{k}(0.002)^k(1-0.002)^{2500-k}$

因 n 很大，p 很小，且 $np=\lambda=5$ 适中，因此用参数为 $\lambda=5$ 的泊松分布来近似代替二项分布，则有

$$P(X>15)\approx 1-\sum_{k=0}^{15}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}\approx 0.000069$$

由此可知，在一年内保险公司亏本的概率是很小的。

2） P（保险公司获利不少于10000元）$= P(30000-2000X \geqslant 10000)$

$$= P(X \leqslant 10)$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{2500}{k} (0.002)^k (1-0.002)^{2500-k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \mathrm{e}^{-5} \approx 0.986305$$

即保险公司获利不少于 10000 元的概率在 98%以上。

P（保险公司获利不少于20000元）$= P(30000-2000X \geqslant 20000) = P(X \leqslant 5)$

$$= \sum_{k=0}^{5} \binom{2500}{k} (0.002)^k (1-0.002)^{2500-k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{5} \frac{5^k}{k!} \mathrm{e}^{-5} \approx 0.615961$$

即保险公司获利不少于 20000 元的概率接近于 62%。

（4）超几何分布。

若 X 的分布律为

$$P(X=m) = \frac{\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad（m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n）$$

则称 X 服从超几何分布，记作 $X \sim H(n,N,M)$。

例如：有一批产品共 N 件，其中 M 件为次品，$N-M$ 件为合格品，先从这批产品中随机地抽取 n 件不同产品，则这 n 件中次品的件数为 X，它的可能取值为 0, 1, 2, …, n（$n \leqslant M$），其概率分布为超几何分布。

3.3 连续型随机变量

1. 概率密度函数及其性质

上一节讨论了离散型的随机变量，其统计规律是用分布律来刻画的。而日常生活中遇到的随机变量未必都是离散型。有一些随机变量的取值可能充满某个有限区间或无穷区间，则定义这种随机变量为连续型随机变量。如电话的呼叫时间；显像管的寿命；对物体长度的测量值等。下面将用另一种形式来刻画连续型随机变量的统计规律。

一般地，设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称密度函数，并称 X 的

分布为连续型分布。

例 3.11 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{T}, & 0\leqslant x<T\\ 1, & T\leqslant x\end{cases}$$

取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0\leqslant x<T\\ 0, & 其他\end{cases}$，可验证 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$ 且 $f(x)\geqslant 0$ 。

事实上，当 $x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$$

当 $0\leqslant x<T$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{T}\mathrm{d}t=\frac{x}{T}$$

当 $T\leqslant x$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{T}\frac{1}{T}\mathrm{d}t+\int_{T}^{x}0\mathrm{d}t=1$$

由定义可知 X 是连续型随机变量。

连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 具有如下性质：

（1） $f(x)\geqslant 0$ 。

由定义可知 $f(x)$ 非负。

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 。

由概率密度的定义和分布函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

反之，若已知一个非负函数 $f(x)$ ，满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ ，则 $f(x)$ 一定是某个随机变量 X 的密度函数。因此，这两条性质可用来判断一个函数 $f(x)$ 是否为密度函数。

（3） $P(x_1<X\leqslant x_2)=\int_{-\infty}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x_1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$ 。

根据定积分的几何意义，$P(x_1<X\leqslant x_2)$ 表示以 x 轴上的区间 $(x_1,x_2]$ 为底，曲线 $y=f(x)$ 为顶的曲边梯形的面积（见图 3-2）。

（4）连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是一个连续函数，且在密度函数 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x)=f(x)$ 。

（5）设 X 为连续型随机变量，对任意一个实数 x_0 ，有 $P(x_0)=0$ ， $x_0\in R$ 。

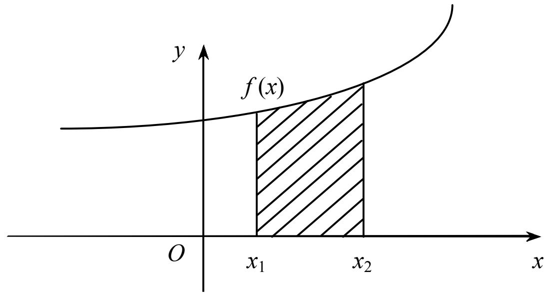


图 3-2

该性质表明连续型随机变量 X 取任一值的概率为 0，这正是连续型随机变量和离散型随机变量的区别。

（6）对于连续型随机变量 X，有

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(x_1 < X \leqslant x_2)$$
$$= P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

例 3.12　设 X 是连续型随机变量，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求：（1）常数 A；（2）X 的分布函数。

解　因为 $f(x)$ 是连续型随机变量的密度函数，所以满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$，于是有

$$\int_0^A 2x\mathrm{d}x = 1$$

解得

$$A = 1$$

当 $x \leqslant 0$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$$

当 $0 < x < 1$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2$$

当 $1 \leqslant x$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^1 2t\mathrm{d}t + \int_1^x 0\mathrm{d}t = 1$$

因此其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x<1\\ 1, & 1\leqslant x\end{cases}$$

2. 常用连续型分布

（1）均匀分布。

设连续型随机变量 X 的密度函数为

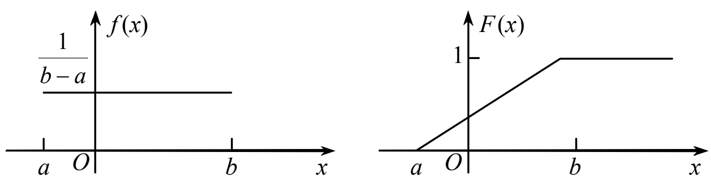
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，其中 a 、b 为参数，且 $a<b$ ，记为 $X\sim U(a,b)$ 。

服从区间 (a,b) 上均匀分布的随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$$

$f(x)$ 、$F(x)$ 的图形分别如图 3-3（a）、（b）所示。



（a）　　（b）

图 3-3　均匀分布 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形

例 3.13　一个电阻器的电阻 R 服从 $(900,1100)$ 上的均匀分布，求 R 落在 950Ω 至 1050Ω 之间的概率。

解　R 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1100-900}, & 900<x<1100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

有

$$P(950<x<1050)=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}\mathrm{d}t=0.5$$

例 3.14　设随机变量 X 服从 $(2,5)$ 区间上的均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率。

解　因为 X 服从 $(2,5)$ 区间上的均匀分布，因此其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2<x<5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $A=\{\text{对}X\text{的观测值大于}3\}$

$$P(A)=P(X>3)=\int_3^5 \frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$$

设 V_3 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数，显然 $V_3\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，于是有

$$P\left(V_3\geqslant 2\right)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

（2）指数分布。

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad（\lambda>0）$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$ 。

服从指数分布的随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

指数分布在实际问题中有广泛的应用，如电子元件的寿命问题；两次呼叫之间的等待时间等都服从指数分布。

例 3.15　设打一次电话所用的时间（单位：min）服从参数为 0.2 的指数分布，如果有人刚好在你前面走进公用电话间并开始打电话（只有一部公用电话）。试求你将等待：（1）超过 5min 的概率；（2）5min 到 10min 之间的概率。

解　令 X 表示电话间那个人打电话所用的时间，由题意知，X 服从参数为 0.2 的指数分布，因此其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所求概率分别为：

$$P(X>5)=\int_5^{+\infty}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}$$

$$P(5<X<10)=\int_5^{10}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$$

例 3.16　某种型号的电灯泡使用时间（单位：小时）X 服从参数为 $\dfrac{1}{5000}$ 的指数分布，求 3 个这种型号的灯泡使用了 1000 小时后至少有 2 个仍可继续使用

的概率。

解 因随机变量X服从参数为$\frac{1}{5000}$的指数分布，则密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5000}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

则

$$P(X>1000)=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{5000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5000}x}\mathrm{d}x=0.82$$

令$Y=\{3$个这种型号的灯泡使用了1000小时后仍可继续使用的个数$\}$，则显然$Y\sim B(3,0.82)$。

因此

$$P(Y\geqslant 2)=\binom{3}{2}(0.82)^2(1-0.82)+\binom{3}{3}(0.82)^3\approx 0.914$$

所以3个这种型号的灯泡使用了1000小时后至少有2个仍可继续使用的概率可达91%。

（3）正态分布。

若随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}（\mu、\sigma\text{ 都是常数，}\sigma>0）$$

则称X服从参数为μ和σ^2的正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

特别地，当$\mu=0$、$\sigma=1$时，即$X\sim N(0,1)$。此时称X服从标准正态分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\quad（-\infty<x<+\infty）$$

服从标准正态分布的随机变量X的分布函数记为$\Phi(x)$，由分布函数定义可知

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

下面验证$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$确实是一个密度函数。

显然，对任意实数x，$f(x)\geqslant 0$。

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\sqrt{2\pi}=1$$

从而得证。

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数的图像如图 3-4 所示。

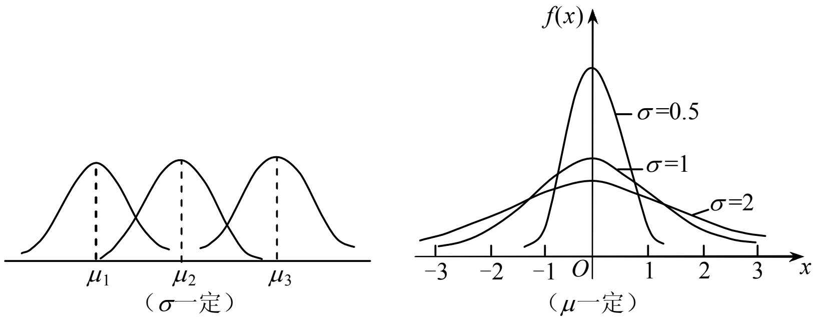


图 3-4　不同参数正态分布的密度函数图形

图 3-4 给出了不同参数的正态分布的密度函数的图形。由图形可得正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数 $f(x)$ 具有以下性质：

1）函数 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称；

2）$f(x)$ 在 $(-\infty,\mu)$ 内单调增加，在 $(\mu,+\infty)$ 内单调减少，且在 $x=\mu$ 处取得最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

从图形中可以看出，正态分布中的两个参数 σ、μ 具有非常重要的意义：

如果固定 σ，改变 μ 的值，则图形沿着 x 轴平移，不改变其形状；如果固定 μ，改变 σ 的值，当 σ 越小时，密度函数 $f(x)$ 的最大值越大，其曲线越陡峭，当 σ 越大时，密度函数 $f(x)$ 的最大值越小，其曲线越平坦。

正态分布在概率论中起着非常重要的作用，这是因为在实际问题中的变量，如测量误差、射击时弹着点与靶心间的距离、成年男子的身高、学生考试的成绩等都服从或近似服从于“中间大，两头小”的正态分布。

注意到，标准正态分布的密度函数 $f(x)$ 为偶函数，易知

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

附表 2 为标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的函数表，可以从表中查找正态分布值：

$$P(X\leqslant x)=\Phi(x)\quad（x>0）$$

当 $x<0$ 时，利用 $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$，从而计算 $\Phi(x)$ 的值。

正态分布随机变量的概率计算都能归结为标准正态分布随机变量的概率计算，常用以下计算式：

1）若 $X \sim N(0,1)$，则

$$P(a < X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2）$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$P(a < X \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

事实上，令 $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$P(a < X \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例 3.17 设 $X \sim N(0,1)$，借助于标准正态分布的分布函数表计算：

1）$P(X \leqslant 1)$；2）$P(X \leqslant -1)$；3）$P(X \geqslant 1.5)$；4）$P(-2 \leqslant X \leqslant 2)$。

解 1）$P(X \leqslant 1) = \Phi(1) = 0.8413$

2）$P(X \leqslant -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

3）$P(X \geqslant 1.5) = 1 - P(X < 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

4）$P(-2 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X < -2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$

$$= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

例 3.18 设 $X \sim N(4,4)$，求下列概率：

1）$P(X \leqslant 6)$；2）$P(-2 \leqslant X \leqslant 6)$。

解 1）$P(X \leqslant 6) = \Phi\left(\dfrac{6-4}{2}\right) = \Phi(1) = 0.8413$

2）$P(-2 \leqslant X \leqslant 6) = \Phi\left(\dfrac{6-4}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-2-4}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-3)$

$$= \Phi(1) - [1 - \Phi(3)] = 0.8413 - (1 - 0.9987) = 0.8400$$

例 3.19 某地抽样调查结果表明，考生的数学成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的数学成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

解 由题可知考生的数学成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu = 72$，又知

$$P(X > 96) = 2.3\%$$

即

$$1 - P(X \leqslant 96) = 1 - \Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right) = 0.023$$

$$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.977$$

查表知$\Phi(2)=0.977$，可知$\sigma=12$。

由此可知

$$X \sim N(72,12^2)$$

$$P(60 \leqslant X \leqslant 84)=\Phi\left(\frac{84-72}{12}\right)-\Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682$$

考生数学考试成绩在60分至84分之间的概率为68.2%。

3. 3σ原则

例3.20 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求下列概率：

（1）$P(|X-\mu| \leqslant \sigma)$；（2）$P(|X-\mu| \leqslant 2\sigma)$；（3）$P(|X-\mu| \leqslant 3\sigma)$。

解
$$\begin{aligned}P(|X-\mu| \leqslant \sigma)&=P\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right)\\&=\Phi\left(\frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1\\&=2\times 0.8413-1=0.6826\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(|X-\mu| \leqslant 2\sigma)&=P\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right)\\&=\Phi\left(\frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu-2\sigma)-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1\\&=2\times 0.9772-1=0.9544\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(|X-\mu| \leqslant 3\sigma)&=P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma)\\&=\Phi\left(\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1\\&=2\times 0.9987-1=0.9974\end{aligned}$$

从上面的结果可以看出，正态分布的随机变量X的取值落在以μ为中心，3σ为半径的区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$内的概率高达 99%，超出这个范围的可能性还不到0.3%（通常忽略不计），此规律称为3σ原则。

例3.21 某人需乘车到机场搭乘飞机，现有两条路线可供选择，走第一条路线所需的时间为X_1，$X_1 \sim N(50,100)$；走第二条路线所需的时间为X_2，$X_2 \sim N(60,16)$，问：

（1）若有70分钟，应选择哪一条路线？

（2）若有65分钟，应选择哪一条路线？

解 （1）若有70分钟可用，采用两条路线可及时赶到的概率分别为

$$P(0<X_1 \leqslant 70)=\Phi\left(\frac{70-50}{10}\right)-\Phi\left(\frac{0-50}{10}\right)=\Phi(2)-\Phi(-5)\approx\Phi(2)$$

$$P(0 < X_2 \leqslant 70) = \Phi\left(\frac{70-60}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{4}\right) = \Phi(2.5) - \Phi(-15) \approx \Phi(2.5)$$

由于 $\Phi(2.5) > \Phi(2)$，所以选择第二条路线为好。

（2）若有 65 分钟可用，此时有：

$$P(0 < X_1 \leqslant 65) = \Phi\left(\frac{65-50}{10}\right) - \Phi\left(\frac{0-50}{10}\right) \approx \Phi(1.5)$$

$$P(0 < X_2 \leqslant 65) = \Phi\left(\frac{65-60}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{4}\right) \approx \Phi(1.25)$$

由于 $\Phi(1.5) > \Phi(1.25)$，所以应选择第一条路线。

3.4 随机变量函数的分布

在实际问题中，不仅要研究随机变量 X，往往还要研究随机变量的函数 $Y = g(X)$，它也是随机变量。本节主要研究随机变量函数的分布。

1. 离散型随机变量函数的分布

设 X 是一个离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
概率	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数，也是一个离散型随机变量，则随机变量 Y 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_i)$	$\cdots$
概率	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

若 $g(x_i)$ 的值有相等的，则应把相等的项合并，同时把对应的概率 p_i 相加。

例 3.22 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

试求：（1）$X-1$ 的分布律；（2）X^2 的分布律。

解 （1）$X-1$ 的分布律为

$X-1$	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

（2）由于

X^2	1	0	1	4	$\frac{25}{4}$
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

因 X^2 的取值有相同的，把相等的值合并，同时对应的概率相加。

即

$$P(X^2=1)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

所以，X^2 的分布律为

X^2	0	1	4	$\frac{25}{4}$
概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

2. 连续型随机变量函数的分布

设 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $f_X(x)$， $g(x)$ 是已知的连续函数，$Y=g(X)$ 也是连续型随机变量，下面介绍求随机变量 Y 的密度函数的方法。

（1）分布函数法。

由分布函数的定义知 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)=\int_{\{x|g(x\leqslant y)\}}f_X(x)\mathrm{d}x$$

则 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}F_Y'(y), & 在f_Y(y)的连续点\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例 3.23 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量 $Y=|X|$ 的密度函数。

解 当 $y<0$ 时，

$$P(|X|\leqslant y)=0$$

当 $y\geqslant 0$ 时，

$$P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}f_X(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

因此

$$P(|X|\leqslant y)=\begin{cases}\int_0^y \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

即 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

因此，Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

例 3.24 设 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求 X^2 的密度函数。

解 当 $y<0$ 时，

$$P(X^2\leqslant y)=0$$

当 $y\geqslant 0$ 时，

$$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此

$$P(X^2\leqslant y)=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}} 1\mathrm{d}x=\sqrt{y}, & 0\leqslant y<1\\ 1, & 1\leqslant y\end{cases}$$

即 X^2 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1\\ 1, & 1\leqslant y\end{cases}$$

所以，X^2 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）公式法。

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，$y=g(x)$ 是单调函数，具有一阶连续导数，其反函数为 $x=h(y)$，则 $Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|$$

例 3.25 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}x^2, & -3<x<6\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求随机变量 $Y=3(2-X)$ 的密度函数。

解 令 $y=g(x)=3(2-x)$，$y=g(x)$ 是单调递减的函数，其反函数为 $x=h(y)=2-\dfrac{y}{3}$，$h'(y)=-\dfrac{1}{3}$，当 $x=-3$ 时，$y=15$；当 $x=6$ 时，$y=-12$。

于是

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, & -12<y<15\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(2-\dfrac{y}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}, & -12<y<15\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(6-y)^2}{27}, & -12<y<15\\ 0, & 其他\end{cases}$$

习题 3

1．设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{A}{N}$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$），试确定常数 A。

2．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$，求 X 的分布律。

3．一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律。

4．某人投篮的命中率为 45%，以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

5．一批产品中有 20%的次品，进行重复抽样检查，共抽取 5 件样品，计算这 5 件样品中恰好有 3 件次品、至多有 3 件次品的概率。

6．一台总机共有 300 台分机，总机有 13 条外线，假设每台分机向总机要外线的概率为 3%，试求每台分机向总机要外线时，能及时得到满足的概率和同时向总机要外线的分机的最可能的台数。

7．有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆车在一天的某时段出事

故的概率为 0.0001，某天的该时段内有 1000 辆汽车通过，求出事故的次数不小于 2 的概率。

8．某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $\left(\frac{1}{2}\right)t$ 的泊松分布，而与时间间隔起点无关（时间以小时计）。

（1）求某天中午 12 时至下午 3 时没收到呼救的概率。

（2）求某天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次呼救的概率。

9．设 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}k(3x^2+x), & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求：（1）常数 k；

（2）X 的分布函数；

（3）$P(1\leqslant X\leqslant 2)$，$P\left(-1\leqslant X\leqslant \frac{1}{2}\right)$。

10．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^3, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$。

求：（1）常数 A；

（2）$P(0.2<x<0.5)$；

（3）密度函数 $f(x)$。

11．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$（$-\infty<x<+\infty$）。

求：（1）常数 A、B；

（2）$P(0\leqslant X\leqslant 1)$；

（3）X 的密度函数 $f(x)$。

12．设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1\\ ax, & 1\leqslant x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

求：（1）常数 a；

（2）X 的分布函数 $F(x)$。

13．设某顾客在某银行的窗口等待服务的时间（单位：min）服从 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的指数分布，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，某顾客在窗口等待服务，若超过 10min，他就离开。

求：（1）设某顾客某天去银行，他未等到服务就离开的概率；

（2）设某顾客一个月要去银行五次，他五次中至多有一次未等到服务就离开的概率。

14．设 X □ $N(5,4)$，求下列概率。

（1）$P(2\leqslant X\leqslant 5)$；（2）$P(|X|\leqslant 2)$；（3）$P(X>3)$；（4）$P(-3\leqslant X\leqslant 9)$。

15．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

试求：$-2X$ 、 X^2 的分布律。

16．设随机变量 X □ $U(0,1)$，试求 $Y=1-2X$ 的密度函数。

17．某工程队完成工程所需的时间 X（单位：天）服从正态分布 $N(100,25)$，按合同规定，若 100 天内完成，则可得利润 10000 元；若100□115 天内完成，则可得利润 1000 元；若超过 115 天，则需赔付 5000 元的罚款，求该工程队在完成该项任务时，所得利润 Y 的分布律。

18．已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 $Y=\sin X$ 的密度函数。