第 4 章　函数极限理论教学方法研究

本文是笔者对工科微积分学极限理论教学方法十年的研究结果，该方法主要用直观形象或表象来思考极限理论，通过类比差异来反映客体的表面共性或相似性，从而揭示极限理论的本质，避免了在极限概念的处理上的过分形式化，使在讲解微积分之前的“大块头”极限论变成“小块头”极限论.

4.1　极限概念及性质的教学方法

一般教材对极限概念的讲解都强调定义，花很多时间去找N、X、δ，结果学生并未真正认识极限概念．事实上，对于极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的定义，我们只需讨论以下四个例子，抓住集合间关系和“动点到定点的距离越来越短”的特征，并使用从特殊到一般的思维方式，不难得出相关定义.

例 4.1　观察函数$y_n=f(n)=\dfrac{1}{n}$（$n\in N$）与函数$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$（$x\in R^+$）的几何特征，并得出极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

将这两个函数的图形作在同一个平面直角坐标系上，进行观察，可以得出以下结论：（1）点集$\{(n,f(n))\}$是点集$\{(x,f(x))\}$的子集；（2）距离$|f(n)-0|$、$|f(x)-0|$随着n、x的不断增大而越来越短，即动点$(n,f(n))$、$(x,f(x))$到定直线$y=0$的距离越来越短，如图 4-1 所示.

我们把具有这种特征的函数性质称为函数的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

例 4.2　观察函数$y_n=f(n)=\dfrac{n}{n+1}$（$n\in N$）与函数$y=f(x)=\dfrac{x}{x+1}$（$x\in R^+$）的几何特征，得出极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$，从而得出极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$定义.

类似，将两个函数的图形作在同一个平面直角坐标系上，进行观察，可以得

出以下结论：（1）点集$\{(n, f(n))\}$是点集$\{(x, f(x))\}$的子集；（2）距离$|f(n)-1|$、$|f(x)-1|$随着n、x的不断增大而越来越短，即动点$(n, f(n))$、$(x, f(x))$到定直线$y=1$的距离越来越短，如图 4-2 所示.

$$y_n = f(n)，n \in N \quad y = f(x) = \frac{1}{x}，x \in R^+$$

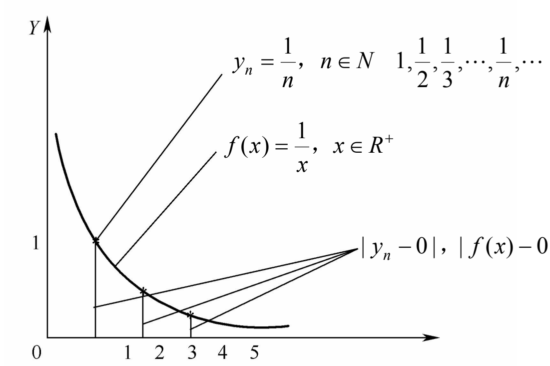

图 4-1　动点$(n, f(n))$、$(x, f(x))$到定直线$y=0$的距离越来越短

$$f(n) = \frac{n}{n+1}，n \in N，f(x) = \frac{x}{x+1}，x \in [1, +\infty)$$

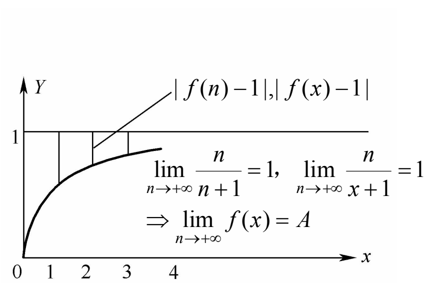

图 4-2　动点$(n, f(n))$、$(x, f(x))$到定直线$y=1$的距离越来越短

类似，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$、$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. 一般地，有以下定义.

定义 1　对于整变量函数（数列）$f(n)$，A为常数. 如果当n取自然数无限增大时，有$f(n)$的值无限趋近于常数A，即$|f(n)-A|$总能任意地小，则称当n趋于无穷大时，函数$f(n)$以A为极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$（或记作，当$n \to \infty$时，$f(n) \to A$）. 由此，我们可得到如下结论：单调有界数列一定有极限.

定义 2　对于函数$f(x)$，A为常数. 如果当x取值无限增大时，有$f(x)$的值

无限趋近于常数 A，即 $|f(x)-A|$ 总能任意地小，则称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$（或记作，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$）.

定义 3 （$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$ 的精确定义）对于预先给定的任意小正数 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|f(n)-A|<\varepsilon$.

其余极限的精确定义请读者自己完成.

例 4.3 观察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的几何特征，得出极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，从而得出极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义.

根据观察，我们可以得出如下结论：（1）在 $y=2$ 上下方各作一条距离为 ε（>0）的直线 $y=2+\varepsilon$，$y=2-\varepsilon$，分别与函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图形交于一点；（2）过两交点作平行于 y 轴的两条直线与 x 轴交于两点 $(1-\delta_\varepsilon,0)$、$(1+\delta_\varepsilon,0)$，从而形成一区间 $(1-\delta_\varepsilon,1+\delta_\varepsilon)$；（3）当 $x\in(1-\delta_\varepsilon,1+\delta_\varepsilon)$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，如图 4-3 所示.

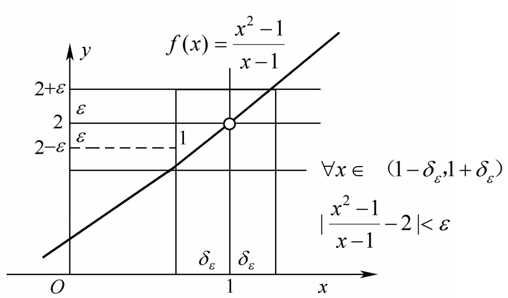

图 4-3 当 $x\in(1-\delta_\varepsilon,1+\delta_\varepsilon)$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$

我们把具有这种几何特征的极限记为：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，也称函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x\to1$ 时的极限存在.

同时我们还可以得出结论：函数在某点处的极限是否存在仅与它在该点附近的变化有关，而与函数本身在该点有无定义无关. 也就是说，研究函数在一点的极限时，不论函数在该点是否有定义，都仅仅只是关注函数在该点的 $(x_0-\delta_\varepsilon,x_o)\cup(x_o,x_0+\delta_\varepsilon)$ 变化情况而已，这种考虑将有利于区分函数在一点处的变化特性.

定义 4 对于函数 $f(x)$，A 为常数．对于预先给定的任意小正数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$，当 $x\to x_0$ 时的极限为 A．

为了今后应用方便，我们也考虑左右极限问题．如图 4-4 所示．

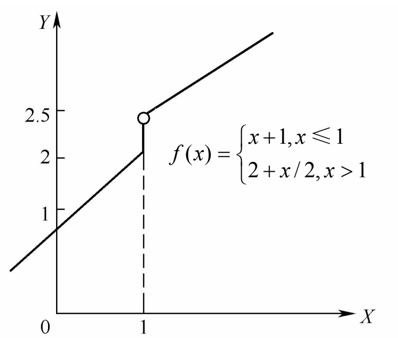

图 4-4 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2.5$（称函数的右极限），$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$（称函数的左极限），这种情形我们称函数 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时的极限不存在．

图 4-3 中描述的极限具有特征：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$．

因此，有下列定理：

定理 2.1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$．即，函数极限存在的充分必要条件是左右极限存在且相等．

可以证明，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 均不存在．

该定义的方法是由教师分析，学生通过逐渐接触的函数的图形的基础上对表象进行分类加工思维，了解“所有事物的本质特点”的．其优点是：（1）容易认识极限概念的本质；（2）克服了在极限概念的处理上过分形式化的倾向；（3）学生不需要在“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-X$”、“$\varepsilon-\delta$”定义上花太多的功夫；（4）易于推广到多维空间．

4.2 函数极限的性质

定理 2.2 （唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$、$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$．

定理 2.3 （夹逼定理）如果函数 $g(x)$、$f(x)$、$h(x)$ 满足：$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$．

在极限的性质的教学过程中只对整变量函数的极限的唯一性给出证明，其他性质进行介绍可以不加以证明.

定理 2.4 （四则运算）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$、$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$．

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$．

特别有 $\lim\limits_{x\to x_0}[Cg(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=CB$．

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$，（$B\neq 0$）.

值得注意的是我们在此仅对 $x\to x_0$ 的情形给出描述，事实上，对于 $n\to\infty$（$x\to\infty$）的情形，以上定理 2.2～2.4 均成立.

极限的运算性质要加以详细解释，因为这是求极限的重要依据；两边夹定理要加以解释，因为该定理在讲解两个重要极限时会用到.

4.3　整变量函数极限的计算

应根据极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$、$\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ 及有关性质，用下列例子进行分析讲解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+n+3}{9n^2+2n+1}、\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+n+3}{9n^3+2n+1}、\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+n+3}{9n^2+2n+1}、\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(n+5)^4+(3n+1)^4}$$

要特别指出，前三个极限之所以这样安排，完全是为了以后讲解一般函数的类似极限，这样处理，充分注意到了前后知识的连续性．最后一个极限在计算时，不要将二项式展开．这四个例子最好安排在讲解整变量函数极限的运算性质后讲解.

4.4　一般函数极限的计算

应根据极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$、$\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$、$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 及有关性质，用下列例子进行分析讲解：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+x+1}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x+1}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^4(x-1)^{78}}{(x+3)^{82}}$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})$

（4）$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+x-1)$、$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{x^2+1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)$、$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

在讲解函数极限的计算方法时，要适当注意类型的完整性和典型性，使学生既能掌握所列举的极限的计算方法，又能在计算其他极限时参考.

4.5 两个重要极限

4.5.1 对于极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，应先在假设成立的条件下分析该极限的应用，在学生掌握应用方法的基础上去证明（可让学生自己去理解证明）. 由于在中学数学中有结论“当x很小很小时，$\sin x$与x等价.”所以可利用下列极限去分析该极限的计算方法：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$.

$\Updownarrow\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3-x)}{x^2-9}=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=2$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}kx}{x}=k\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

4.5.2 由于函数$y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$对应的点实际上是函数$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$图像上的部

分点，根据例 4.1 的思想，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$．对于该极限的计算应教学生去分析下面的例子：

（1）利用公式的形式：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$．

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$．

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}}\right]^{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{2}}{\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)}=\mathrm{e}^{2}$．

（2）转化成公式：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}\xleftrightarrow{\frac{x+2}{x-3}=1+\frac{1}{u}}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{5u+3}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{5}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3}=\mathrm{e}^{5}.$$

（3）综合应用：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin3x)}{\mathrm{tg}2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x\cdot\ln(1+\sin3x)^{\frac{1}{\sin3x}}}{\mathrm{tg}2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\mathrm{tg}2x}.$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\mathrm{tg}2x}\cdot\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

一般结论：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1\pm\dfrac{c}{ax\pm b}\right)^{dx\pm\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\pm\frac{cd}{a}}$．

值得一提的是，在处理这两个重要极限时，我们要让学生充分认识这两个极限公式的形式特征，学会利用它们的形式去求有关极限．

4.6 洛必达法则及应用

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域（或无穷区间）内可导，且

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0(\infty)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$（$\infty$），

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）（$g'(x)\neq 0$）

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）

例 4.4 证明极限公式.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

证明： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})/1/x}\overset{洛}{=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=\mathrm{e}$

例 4.5 计算极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解法 1： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$

解法 2： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)$ （$0\cdot\infty$）

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{x}\right)}=2$$

（4）$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$ （0^0）

解 $$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1/x}{-\cos x}}{\sin^2 x}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x/x}{\cos x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\cos x}}=e^0=1\ .$$

（5）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$ （定积分中介绍）

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t\mathrm{d}t}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

在极限的计算过程中，不难发现以下现象：（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即函数在 x_0 出的极限值等于函数在该点的函数值；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$ （∞）.

由此可引导我们去继续探求函数性质特征，即无穷小量与无穷大量、函数的连续性、函数的可导性、函数的可积性等.