第 2 章　导数与微分

本章学习目标

- 理解导数和微分的概念及其几何意义
- 熟练掌握导数的四则运算法则和基本求导公式
- 熟练掌握复合函数、隐函数的求导方法
- 了解高阶导数的概念，掌握二阶导数的求法
- 了解可导、可微与连续之间的关系

2.1　导数的概念

2.1.1　引出导数概念的实例

例 1　平面曲线的切线斜率.

曲线 $y = f(x)$ 的图像如图 2.1 所示，现在我们来讨论它的切线问题．在曲线上任取两点，$M(x_0, y_0)$，$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$，作割线 MN．让 N 沿着曲线趋向 M，割线 MN 的极限位置 MT 就称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的切线．则割线 MN 的斜率为

$$k_{MN} = \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

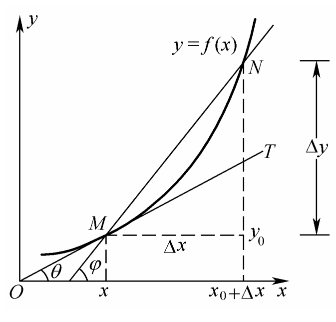

图 2.1

这里 φ 为割线 MN 的倾角，设 θ 是切线 MT 的倾角，当 $\Delta x \to 0$ 时，点 N 沿曲线趋于点 M，若上式的极限存在，记为 k，则此极限值 k 就是所求的切线 MT 的斜率，即

$$k = \tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

例 2　产品总成本的变化率.

设某产品的总成本 C 是产量 Q 的函数，即 $C=C(Q)$，当产量由 Q_0 变到 $Q_0+\Delta Q$ 时，总成本相应的改变量为 $\Delta C=C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)$.

则产量由 Q_0 变到 $Q_0+\Delta Q$ 时，总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}.$$

当 ΔQ 趋向于零时，如果极限

$$\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{C(Q_0+\Delta Q)-C(Q_0)}{\Delta Q}$$

存在，由称此极限是产量为 Q_0 时总成本的变化率.

2.1.2　导数的概念

1．导数的概念

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.1.1}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，或记为

$$f'(x_0)，\quad y'\big|_{x=x_0}，\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad 或\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限（2.1.1）不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

若记 $x=x_0+\Delta x$，由于当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，所以导数 $f'(x_0)$ 的定义也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

由于引入了导数的概念，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即

$$k=\tan\theta=f'(x_0).$$

2．左、右导数

既然导数是增量比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，那么下面两个极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

分别叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

由上一章关于左、右极限的性质可知下面的定理.

定理 1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在并且相等.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导．此时，对于每一个 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$，从而构成了一个新的函数，称为函数 $f(x)$ 的导函数，记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \text{或}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

通常在不致发生混淆的情况下，导函数也简称为导数.

2.1.3 导数的几何意义

由前面的讨论可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率．即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\theta}\tan\varphi=\tan\theta=k.$$

过曲线上一点且垂直于该点处切线的直线，称为曲线在该点处的法线.

根据导数的几何意义，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线、法线方程分别为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

及

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad (f'(x_0)\neq 0).$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线的方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$.

根据导数的定义，求函数 $y=f(x)$ 的导数，一般分为以下三个步骤：

（1）求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（2）算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

（3）取极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 3 求函数 $y=x^2$ 的导数.

解 （1）求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$

$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

（2）算比值　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

（3）取极限　$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

即　$(x^2)'=2x$.

同理可得　$(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）.

特别地，当 $n=1$ 时，$(x)'=1$.

一般地，当指数为任意实数 μ 时，可以证明

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1} .$$

例如，求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数，

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

又如，求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的导数，

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例 4　求曲线 $y=x^3$ 在点(2,8)处的切线与法线方程.

解　因为 $y'=3x^2$ ，由导数的几何意义，曲线 $y=x^3$ 在点(2,8)的切线与法线的斜率分别为

$$k_1=y'\big|_{x=2}=(3x^2)\big|_{x=2}=12,\ k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{12} .$$

于是所求的切线方程为

$$y-8=12(x-2) ,$$

即

$$12x-y-16=0 .$$

法线方程为

$$y-8=-\frac{1}{12}(x-2) ,$$

即

$$x+12y-98=0 .$$

2.1.4　可导与连续的关系

定理 2　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

证　因为 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，故有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

根据函数极限与无穷小间的关系，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha ,$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小．两端乘以 Δx ，得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

由此可见

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \right] = 0,$$

即函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定理的逆命题不一定成立，即在某点连续的函数，在该点未必可导.

例 5 证明函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导（如图 2.2）.

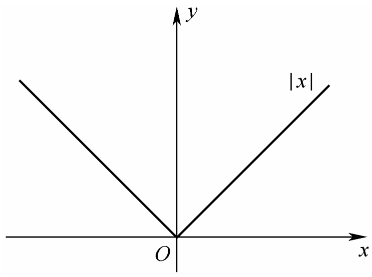

图 2.2

证 因为

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = |0+\Delta x| - |0| = |\Delta x|,$$

所以 $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

即 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

当 $\Delta x > 0$ 时，$y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数为

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

当 $\Delta x < 0$ 时，$y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数为

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

即函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的左、右导数不相等，从而在 $x=0$ 处不可导．由此可见，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

习题 2.1

1．求下列函数在指定点处的导数：

（1）$y=\cos x,\ x=\dfrac{\pi}{2}$； （2）$y=\ln x,\ x=5$.

2．求下列函数的导数：

（1）$y=\log_3 x$； （2）$y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$；

（3） $y=\sqrt[3]{x^2}$ ；　　　　　　　（4） $y=\cos x$.

3．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续；

（2）若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不可导；

（4）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不连续.

4．求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程与法线方程.

5．问 a ， b 取何值时，才能使函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leqslant x_0 \\ ax+b, & x>x_0 \end{cases}$ ，在 $x=x_0$ 处连续且可导？

2.2　导数的运算

2.2.1　函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1　设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 处均可导，则它们的和、差、积、商（当分母不为零时）在点 x 处也可导，且有以下法则：

（1） $\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$ ；

（2） $\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ ，

特别地，若 $v(x)=C$ (C 为常数)，则 $(Cu)'=Cu'$ ；

（3） $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$.

特别地，如果 $u(x)=1$ ，则可得公式

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}\qquad (v(x)\neq 0).$$

注意　法则（1），（2）均可推广到有限多个可导函数的情形，

例如，设 $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ 在点 x 处均可导，则

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'.$$

$$\begin{aligned}(uvw)'&=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+uv')w+uvw'\\&=u'vw+uv'w+uvw'.\end{aligned}$$

例 1　设 $y=x^3-\mathrm{e}^x+\sin x+\ln 3$ ，求 y' .

解　$$\begin{aligned}y'&=(x^3-\mathrm{e}^x+\sin x+\ln 3)'\\&=(x^3)'-(\mathrm{e}^x)'+(\sin x)'+(\ln 3)'\\&=3x^2-\mathrm{e}^x+\cos x.\end{aligned}$$

例 2　设 $y=5\sqrt{x}2^x$ ，求 y' .

解　$y'=(5\sqrt{x}2^x)'=5(\sqrt{x})'2^x+5\sqrt{x}(2^x)'$

$$=\frac{5\cdot 2^x}{2\sqrt{x}}+5\sqrt{x}2^x\ln 2\ .$$

例 3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ .$$

即 $$(\tan x)'=\sec^2 x\ .$$

用类似的方法，可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x\ .$

例 4 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\tan x=\sec x\cdot\tan x\ .$$

即 $$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x\ .$$

用类似的方法，可得 $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x\ .$

2.2.2 复合函数的导数

定理 2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad y'_x=y'_u\cdot u'_x\ .$$

证 给自变量 x 一个增量 Δx，相应地函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的改变量为 Δu 和 Δy．根据函数极限与无穷小的关系定理，由 $y=f(u)$ 可导，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha\ ,$$

其中 α 是当 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小．上式两边同乘 Δu 得

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u\ ,$$

于是 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ .$$

因为函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，所以 $u=\varphi(x)$ 在 x 处连续，

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\ .$$

上式表明，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，可先分别求出 $y=f(u)$ 对 u 的导数和 $u=\varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可.

以上法则还可记为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 或 $\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)\ .$

对于多次复合的函数，其求导公式类似，这种复合函数的求导法则也称为链导法.

例 5　设 $y=\sin(1+x^2)$，求 y'.

解　$y=\sin(1+x^2)$ 可看作是由 $y=\sin u$，$u=1+x^2$ 复合而成的，因此

$$\begin{aligned} y' &= (\sin u)'_u \cdot (1+x^2)'_x \\ &= \cos u \cdot 2x = \cos(1+x^2)\cdot 2x . \end{aligned}$$

对复合函数的复合过程熟悉后，就不必再写中间变量，可直接按复合步骤求导.

例 6　设 $y=\sin\ln\sqrt{x^2+2}$，求 y'.

解　$y'=\cos\ln\sqrt{x^2+2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x=\dfrac{\cos\ln\sqrt{x^2+2}\cdot x}{x^2+2}$.

2.2.3　反函数的求导法则

前面已经给出一些基本初等函数的导数公式．由于指数函数与反三角函数分别是对数与三角函数的反函数，为得到它们的导数公式，下面利用复合函数的求导法，推导一般函数的反函数的求导法则.

定理 3　如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} .$$

证　因 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，故可将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 y 看作中间变量，从而组成复合函数

$$x=\varphi(y)=\varphi[f(x)] .$$

上式两边对 x 求导，应用复合函数的链导法，得

$$1=\varphi'_y f'_x \text{ 或 } 1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} .$$

因此

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi'(y)\neq 0\right).$$

例 7　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，而 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调且可导，且

$$(\sin y)'_y=\cos y\neq 0 ,$$

因此在对应的区间 $(-1,1)$ 内，有

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

即

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

同理可得 $$(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.2.4 基本初等函数的导数

前面我们已经给出了所有基本初等函数的导数，建立了函数的四则运算的求导法则、复合函数的求导法则以及反函数的求导法则，这就解决了初等函数的求导问题. 现将基本导数公式汇成下表.

基本导数公式表

1．$(C)' = 0$（C 为常数）;

2．$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$（$\mu$ 为常数）;

3．$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$；

4．$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

5．$(a^x)' = a^x \ln a$；

6．$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$；

7．$(\sin x)' = \cos x$；

8．$(\cos x)' = -\sin x$；

9．$(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$；

10．$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

11．$(\sec x)' = \sec x \tan x$；

12．$(\csc x)' = -\csc x \cot x$；

13．$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

14．$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

15．$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

16．$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

17．$(\sinh x)' = \cosh x$；

18．$(\cosh x)' = \sinh x$.

要熟练掌握函数的四则运算求导法则与复合函数的求导法则，以此求初等函数的导数，

这是微积分计算的基础.

例 8　设 $y=(2x^2+\sin x)^3$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解　$y'=[(2x^2+\sin x)^3]'=3(2x^2+\sin x)^2(2x^2+\sin x)'$

$=3(2x^2+\sin x)^2(4x+\cos x)$，

$$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=[3(2x^2+\sin x)^2(4x+\cos x)]_{x=\frac{\pi}{2}}=6\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+1\right)^2.$$

例 9　设 $y=(1+x^2)^x$，求 y'.

解　方法一

函数 y 可以写成 $y=(1+x^2)^x=\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+x^2)}$，所以

$$\begin{aligned}y'&=[\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+x^2)}]'\\&=\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+x^2)}[x\cdot\ln(1+x^2)]'\\&=\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+x^2)}\left[\ln(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}(1+x^2)'\right]\\&=(1+x^2)^x\cdot\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right].\end{aligned}$$

方法二　将函数 $y=(1+x^2)^x$ 两边取自然对数，即

$$\ln y=x\cdot\ln(1+x^2).$$

两边对 x 求导，注意左端的 y 是 x 的函数，由链导法，有

$$\frac{1}{y}y'=\ln(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}\cdot 2x=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}.$$

因此

$$y'=(1+x^2)^x\cdot\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right].$$

此例中的函数称为幂指函数，其一般形式为 $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ $(f(x)>0)$．求幂指函数的导数，可选用此例中介绍的两种方法中的任一种，方法二称为对数求导法，这个方法除适用于幂指函数外，还适用于多个因式连乘的函数.

例 10　设 $y=\sqrt{(x^2+1)(3x-4)(x-1)}$，求 y'.

解　将函数取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(3x-4)+\frac{1}{2}\ln(x-1),$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{2(3x-4)}+\frac{1}{2(x-1)},$$

所以

$$y'=\sqrt{(x^2+1)(3x-4)(x-1)}\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{2(3x-4)}+\frac{1}{2(x-1)}\right).$$

2.2.5 隐函数和由参数方程确定的函数的导数

前面讨论的函数的导数，其对象都是显函数的形式，即 $y=f(x)$．下面利用前面介绍的导数运算的知识讨论由方程确定的隐函数及参数方程确定的函数的导数．

1．隐函数的导数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$，求隐函数的导数，可根据复合函数的链导法，直接由方程求得它所确定的隐函数的导数，下面举例说明．

例 11 求方程 $\mathrm{e}^y-x^2y+\mathrm{e}^x=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解 因为 y 是 x 的函数，所以 e^y 是 x 的复合函数，利用链导法，方程两端对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y\cdot y'-(2xy+x^2y')+\mathrm{e}^x=0.$$

解出 y'，便得所求的隐函数的导数

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y-x^2}\ \ (\mathrm{e}^y-x^2\neq 0).$$

例 12 设 $y=\arctan(x+2y)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解 这是一个隐函数的导数问题, 两边对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{1+(x+2y)^2}(1+2y'),$$

解出 y'，得

$$y'=\frac{1}{(x+2y)^2-1}.$$

2．参数方程所确定的函数的导数

变量 x 与 y 之间的函数关系在一定条件下可由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

确定，其中 t 是参数，对参数方程所确定的函数 $y=f(x)$ 求导，不必消去 t 解出 y 对于 x 的直接关系，可利用参数方程直接求得 y 对 x 的导数．

设 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ 都是可导函数，且 $x=\varphi(t)$ 具有单值连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则参数方程确定的函数可以看成 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数，根据复合函数和反函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

这就是由参数方程所确定的函数 $y=f(x)$ 的求导公式．

例 13 求曲线 $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t-t^3.\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程．

解 曲线上对应 $t=1$ 的点 (x,y) 为 $(0,0)$，曲线在 $t=1$ 处的切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{1-3t^2}{2t}\right|_{t=1}=\frac{-2}{2}=-1,$$

于是所求的切线方程为 $y=-x$.

2.2.6　高阶导数

如果函数 $f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，就称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'',\ f''(x),\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \text{或} \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

即
$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]' \text{或} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

类似地，这个定义可推广到 $y=f(x)$ 的更高阶的导数，如 n 阶导数为

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{n\text{次}}f(x)=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f^{(n)}(x)=y^{(n)}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

根据高阶导数的定义，求函数的高阶导数就是将函数逐次求导，因此，前面介绍的导数运算法则与导数基本公式，仍然适用于高阶导数的计算.

例 14　设 $y=a^x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=a^x\ln a,\ y''=a^x(\ln a)^2,\cdots,\ y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

特别地　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,\ (\mathrm{e}^x)''=\mathrm{e}^x,\ \cdots,\ (\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

例 15　设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解
$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

即
$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

习题 2.2

1．求下列函数的导数：

（1）$y = xa^x + 7e^x$；　　　　（2）$y = 3x\tan x + \sec x - 4$；

（3）$s = \dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$；　　　　（4）$y = \sqrt{1+\ln x}$；

（5）$y = (x^2 - x)^5$；　　　　（6）$y = 2\sin(3x+6)$；

（7）$y = \cos^3 x$；　　　　（8）$y = \ln(\tan x)$．

2．求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$y = x\cos x$；　　　　（2）$y = e^{2x-1}$．

3．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

（1）$x^2 - y^2 = xy$；　　　　（2）$x\cos y = \sin(x+y)$．

2.3　微分

前面讲过导数描绘的是在点 x 处的变化率．但有时在实际工程技术中，我们还常遇到与导数密切相关的一类问题，这就是当自变量有一个微小的增量 Δx 时，要计算相应的函数的增量 Δy 这类问题往往是比较困难的，需要一种近似计算公式，找出简便的计算方法．

2.3.1　微分的概念

例 1　设有一个边长为 x_0 的正方形金属片，受热后它的边长伸长了 Δx，问其面积增加了多少？

解　正方形金属片的面积 A 与边长 x 的函数关系为 $A = x^2$．由图 2.3 可以看出，受热后，当边长由 x_0 伸长到 $x_0 + \Delta x$ 时，面积 A 相应的增量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

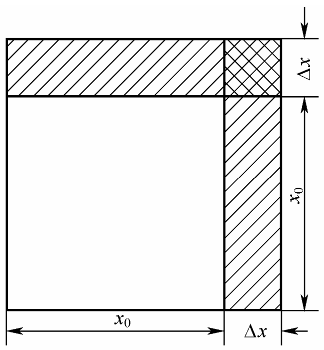

图 2.3

从上式可以看出，ΔA 分成两部分：第一部分是 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$，是当 $\Delta x \to 0$ 时与 Δx 同阶的无穷小；第二部分是 $(\Delta x)^2$，就是图中带有交叉线的小正方形的面积，是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小．这表明，当 $|\Delta x|$ 很小时，第二部分的绝对值要比第一部分的绝对值小得多，

可以忽略不计，而只用一个简单的函数，即 Δx 的线性函数作为 ΔA 的近似值：

$$\Delta A \approx 2x_0\Delta x\,. \tag{2.3.1}$$

这部分就是面积 ΔA 的增量的主要部分（也称线性主部）.

因为 $A'(x_0)=(x^2)'\big|_{x=x_0}=2x_0$，所以（2.3.1）式可写成

$$\Delta A \approx A'(x_0)\Delta x\,.$$

由此引进函数微分的概念.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o\,(\Delta x)\,,$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o\,(\Delta x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，

记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}\,,\ \text{即}\ \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x\,. \tag{2.3.2}$$

于是，（2.3.1）式可写成

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A\big|_{x=x_0}$$

由上面的讨论和微分定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微与可导是等价的，且 $A=f'(x_0)$，因而 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x\,.$$

通常把自变量的增量 Δx 记为 $\mathrm{d}x$，称为自变量的微分，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分又可写成

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x\,. \tag{2.3.3}$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可微，则称该函数在 (a,b) 内可微，或称函数 $f(x)$ 是在 (a,b) 内的可微函数．此时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点 x 处的微分记为 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x\,, \tag{2.3.4}$$

上式两端同除以自变量的微分 $\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)\,.$$

这就是说，函数 $f(x)$ 的导数等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为微商.

例 2　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时的改变量和微分.

解　$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=1.01^2-1^2=0.0201$，在点 $x=1$ 处，

$$\mathrm{d}y=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x\,,$$

于是

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=0.02\,.$$

例 3　半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2$，当半径增大 Δr 时，求面积的增量与微分.

解　面积的增量

$$\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2.$$

面积的微分为

$$\mathrm{d}S=S_r'\Delta r=2\pi r\Delta r.$$

2.3.2 微分的几何意义

为了对微分有直观的了解，下面我们来说明微分的几何意义.

设函数 $y=f(x)$ 的图像如图 2.4 所示．过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $M(x,y)$ 处作切线 MT，设 MT 的倾角为 α，则

$$\tan\alpha = f'(x).$$

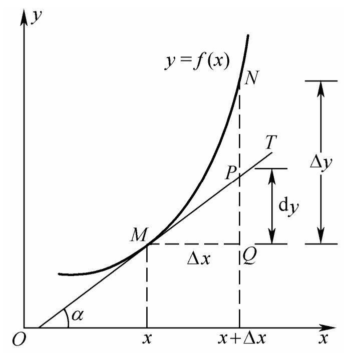

图 2.4

当自变量 x 有增量 Δx 时，切线 MT 的纵坐标相应地有增量

$$QP=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x=\mathrm{d}y.$$

因此，微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 在几何上表示当 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M(x,y)$ 处的切线的纵坐标的增量. 用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 就是用点 M 处的切线纵坐标的增量 QP 近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的增量 QN，并且 $|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.

2.3.3 微分的运算法则

函数 $y=f(x)$ 的微分等于导数 $f'(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$，所以根据导数的公式和运算法则，就能相应地求微分公式和微分运算法则.

1. 基本微分公式表

（1）$\mathrm{d}(C)=0$（C 为常数）；

（2）$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；

（4）$\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$；

（6）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

（8）$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

（10） $\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（11） $\mathrm{d}(\sec x) = \sec x \tan x\mathrm{d}x$；

（12） $\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x \cot x\mathrm{d}x$；

（13） $\mathrm{d}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（14） $\mathrm{d}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（15） $\mathrm{d}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（16） $\mathrm{d}(\operatorname{arc}\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u(x)=u$， $v(x)=v$ 均可微，则

$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ （C 为常数）;

$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$ （$v \neq 0$）.

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y = f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = \left\{ f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x \mathrm{d}x = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

而 $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x$，于是

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u. \tag{2.3.5}$$

将（2.3.5）式与（2.3.4）式比较，可见不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分总保持同一形式，这个性质称为一阶微分形式的不变性.

利用这个性质可以比较方便地求一些复合函数的微分与隐函数的微分以及它们的导数.

例 4　设 $y=\sqrt{2+3x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\mathrm{d}y$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\sqrt{2+3x^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2+3x^2}}(2+3x^2)' = \dfrac{3x}{\sqrt{2+3x^2}}$，

$\mathrm{d}y = \dfrac{3x}{\sqrt{2+3x^2}}\mathrm{d}x$.

例 5　求由方程 $x^2+2xy-2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与微分 $\mathrm{d}y$.

解　对方程两边求导数，得

$$2x+2y+2xy'-4yy'=0.$$

即导数为
$$y' = \frac{x+y}{2y-x}.$$

微分为　　$$\mathrm{d}y=\frac{x+y}{2y-x}\mathrm{d}x.$$

由以上讨论可以看出，微分与导数虽是两个不同的概念，但却紧密相关，求出了导数便立即可得微分，求出了微分亦可得导数，因此，通常把函数的导数与微分的运算统称为微分法．在高等数学中，把研究导数和微分的有关内容称为微分学．

2.3.4　微分在近似计算中的应用

在实际问题中，经常利用微分作近似计算．

由微分的定义可知，当函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们有近似公式

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,$$

或写成

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2.3.6}$$

上式中令 $x_0+\Delta x=x$，则

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.3.7}$$

特别地，当 $x_0=0$，$|x|$ 很小时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{2.3.8}$$

公式（2.3.6），（2.3.7），（2.3.8）可用来求函数 $f(x)$ 的近似值．

注意，在求 $f(x)$ 的近似值时，要选择适当的 x_0，使 $f(x_0)$，$f'(x_0)$ 容易求得，且 $|x-x_0|$ 较小．

应用（2.3.8）式可以推得一些常用的近似公式，当 $|x|$ 很小时，有

（1）$\sin x\approx x$（x 用弧度作单位）；

（2）$\tan x\approx x$（x 用弧度作单位）；

（3）$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；

（4）$\ln(1+x)\approx x$；

（5）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$．

例 6　计算 $\sin 46^\circ$ 的近似值．

解　设 $f(x)=\sin x$，取 $x=46^\circ$，$x_0=45^\circ=\frac{\pi}{4}$，则 $x-x_0=1^\circ=\frac{\pi}{180}$，

于是由（2.3.7）式得

$$\sin x\approx \sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0).$$

即

$$\sin 46^\circ\approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.719.$$

习题 2.3

1．求下列函数的微分：

（1）$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$；　（2）$y=\sqrt{\arcsin\sqrt{x}}$；

（3）$y=\tan^2(1+2x^2)$；　（4）$y=\sqrt{\cos 3x}+\ln\tan\frac{x}{2}$.

2．在括号内填入适当的函数，使等式成立：

（1）$\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；　（2）$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；　（4）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$.

3．利用微分求近似值：

（1）$\sqrt[6]{65}$；　（2）$\lg 11$.

本章小结

1．基本概念

导数是一种特殊形式的极限，即函数的改变量与自变量的改变量之比当自变量改变量趋于零时的极限.

微分是导数与函数自变量改变量的乘积或者说是函数增量的近似值.

2．几何意义

$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率；

微分 $\mathrm{d}y$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线纵坐标对应于 Δx 的改变量；

Δy 是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标对应于 Δx 的改变量，$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$；

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导必连续；连续未必可导.

3．基本计算

本章最重要的计算就是导数运算，主要有运用导数基本公式和运算法则，求简单函数和复合函数的导数，求高阶导数.求微分的方法与求导数类似.特别地 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，即求微分 $\mathrm{d}y$，可以先求导数 $f'(x)$，后面再乘一个 $\mathrm{d}x$.

有两种求导方法需要强调：

（1）隐函数求导法：设方程 $F(x,y)=0$ 表示自变量 x 为因变量 y 的隐函数，并且可导，利用复合函数求导公式，将方程两边对 x 求导，切记 y 是 x 的函数，然后解方程求出 y'；

（2）取对数求导法：对于两类特殊的函数：幂指函数和多因子乘积函数，可以通过在方程的两边取对数，转化为隐函数，然后按隐函数求导的方法求出导数 y'.

4．简单应用

（1）导数：曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程和法线方程分别是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\text{ 和}$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

（2）微分：当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似计算公式

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$$

这个公式可以用来直接计算函数增量的近似值，而公式
$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$
可以用来计算函数的近似值.

复习题 2

1．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点处必无切线；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $y=f(x)$ 必处处可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必可导；

（4）若 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导.

2．求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{2\sec x}{1+x^2}$；（2）$y=\dfrac{\arctan x}{x}+\arccos x$；

（3）$y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$；（4）$y=x(\sin x+1)\csc x$；

（5）$y=\cot x\cdot(1+\cos x)$；（6）$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

（7）$y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；（8）$y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

3．求函数 $y=x^2\ln x$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1）$y\mathrm{e}^x+\ln y=1$；（2）$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

5．求由方程 $y=1+x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

自测题 2

1．填空题

（1）函数 $y=(1+x)\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为____________________；

（2）已知 $f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-3h)}{2h}=$____________________；

（3）若 $f(u)$ 可导，则 $y=f(\sin\sqrt{x})$ 的导数为____________________.

2．选择题

（1）$y=|x+2|$ 在 $x=-2$ 处（　　）.

A．连续；　B．不连续；　C．可导；　D．可微.

（2）下列函数中（　　）的导数等于 $\sin 2x$.

A． $\cos 2x$ ；　B． $\cos^2 x$ ；　C． $-\cos 2x$ ；　D． $\sin^2 x$.

（3）已知 $y=\cos x$ ，则 $y^{(10)}=$ （　　）.

A． $\sin x$ ；　B． $\cos x$ ；　C． $-\sin x$ ；　D． $-\cos x$.

3．计算题

（1）设 $y=\ln\sin^2\dfrac{1}{x}$ ，求 y' ；

（2）设 $y=(1+x^2)\arctan x$ ，求 y'' ；

（3）求函数 $y=\ln(x^3\cdot\sin x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.